Задаци за самосталан рад

(припремио Душан Ђукић)

Покушао сам, вероватно неуспешно, да унутар сваке области сортирам задатке од лакших ка тежим. Радите их сами (али не на часовима) и пробајте сваки. Дајем вам недељу дана за рад. Лепо се забавите.

Алгебра

1. Доказати да се произвољних 101 бројева $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_{100} = 1$ могу поделити у две групе тако да се аритметичке средине бројева у њима разликују за бар $\frac{101}{200}$.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које за све $x, y \in \mathbb{R}$ задовољавају једнакост $f(x+f(x+y)) = f(x-y)+f(x)^2$.

3. Наћи све функције $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ такве да за све x важи $f(x)+f(\frac{1}{x}) = 1$ и $f(2x) = 2f(f(x))$.

4. Дати су реални бројеви $a, b, c, d \geqslant 0$ чији је збир 2. Доказати неједнакост $ab(a^2 + b^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2 + d^2) + cd(c^2 + d^2 + a^2) + da(d^2 + a^2 + b^2) \leqslant 2$.

5. Полином $P(x)$ степена n са реалним коефицијентима је такав да важи $|P(x)| \leqslant 1$ за све $x \in [0, 1]$. Доказати да је $P(-\frac{1}{n}) \leqslant 2^{n+1} - 1$.

6. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за неку реалну константу M важи $f(x) < M$ за све $x \in \mathbb{R}$ и важи $f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Нека су $a_0, a_1, \ldots, a_n$ реални бројеви. Ако једначина $\frac{a_0}{1-x} + \frac{a_1}{1-x^2} + \cdots + \frac{a_n}{1-x^{n+1}} = 0$ има решење $x \in (0, 1)$, доказати да и једначина $a_0 + a_1y + \cdots + a_ny^n = 0$ има решење $y \in (0, 1)$.

8. Ако су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ реални бројеви такви да је $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n$, доказати неједнакост
$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} \frac{1}{n - a_ia_j} \leqslant \frac{n}{2}.$$

Геометрија

9. На страници BC троугла ABC дате су тачке D и E, при чему је D између B и E. Ако су p_1 и p_2 редом обими троуглова ABC и ADE, доказати да је $p_1 > p_2 + 2\min\{BD, CE\}$.

10. У паралелограму $ABCD$ са оштрим углом у темену A, круг кроз тачке A, B и D сече праве BC и CD редом у тачкама K и L. У том кругу N је тачка дијаметрално супротна тачки A. Доказати да је N центар описаног круга троугла CKL.

11. Дат је оштроугли троугао ABC. Унутар троугла одабрана је тачка M таква да је $\sphericalangle BMC = 180^\circ - \sphericalangle BAC$. Праве BM и CM секу наспрамне странице троугла ABC у тачкама D и E редом. Доказати да описани круг троугла ADE пролази кроз фиксну тачку (различиту од A), независно од избора тачке M.

12. Језеро има облик конвексног стоугла $A_1A_2 \ldots A_{100}$ са центром симетрије у тачки O. На језеру се налази острво $B_1B_2 \ldots B_{100}$, где је B_i средиште дужи OA_i. Острво је опасано високим зидом и преко њега се ништа не види. У двема дијаметрално супротним тачкама обале налазе се два стражара. Доказати да сваку тачку обале види бар један стражар.

13. У оштроуглом троуглу ABC са (строго) најмањом страницом BC, H и O су редом ортоцентар и центар описаног круга. Описани круг троугла AHC сече праву AB у тачки $M \neq A$, а описани круг AHB сече праву AC у тачки $N \neq A$. Доказати да центар описаног круга троугла MNH лежи на правој OH.

14. Нека је O центар описаног круга оштроуглог троугла ABC, Тачке P и Q на страницама AB и AC редом су такве да је $\sphericalangle BOP = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle COQ = \sphericalangle ACB$. Доказати да права симетрична правој BC у односу на праву PQ додирује описани круг троугла APQ.

15. У троуглу ABC, тачке D и E на правој AB су такве да је $D - A - B - E$ и $AD = AC$, $BE = BC$. Означимо са M и N редом средишта лукова AC и BC описаног круга $\triangle ABC$ који не садрже треће теме. Праве DM и CA се секу у P, а праве EN и CB се секу у Q. Доказати да центар уписаног круга I троугла ABC лежи на правој PQ.

16. Дат је оштроугли троиугао ABC. Нека је D подножје висине из темена A, а M и N редом подножја нормала из D на странице AB и AC. Права MN сече описани круг k троугла ABC у тачкама P и Q, а права AD сече k у тачки $R \neq A$. Доказати да је D центар уписаног круга троугла PQR.

Комбинаторика

17. Дат је природан број n. Доказати да је број пермутација σ скупа $\{1, 2, \ldots, 4n\}$, таквих да је $i + \sigma(\sigma(i)) = 4n + 1$ за све $i = 1, \ldots, 4n$, једнак $\frac{(2n)!}{n!}$.

18. Изабрано је неколико затворених интервала (дужине веће од 0) са крајевима у целобројним тачкама од 0 до 2013. Притом, кад год је један интервал садржан у другом, та два интервала имају један заједнички крај. Колико највише интервала може бити?

19. У равни је дато десет тачака означених бројевима $1, 2, \ldots, 10$. Можемо да поставимо координатни систем у равни и да запишемо тачке у растућем поретку по првој координати (под условом да су ове координате различите). Колико највише различитих пермутација бројева $1, \ldots, 10$ можемо да добијемо на овај начин?

20. У графу са 300 темена сва темена имају степен 3. Колико највише циклова дужине 4 може бити у том графу?

21. Дати су природни бројеви a и b. Коначни скупови $A, B \subset \mathbb{Z}$ су дисјунктни и имају својство да за свако $x \in A \cup B$ важи $x + a \in A$ или $x - b \in B$. Доказати да је $a|A| = b|B|$.

22. Посматрајмо n кругова $C_1, C_2, \ldots, C_n$ у равни таквих да центар круга C_i лежи на кругу C_{i+1}, где је $C_{n+1} = C_1$. Одредити највећи могући број парова (i, j) за које унутрашњост круга C_j лежи у унутрашњости круга C_i.

23. У пољима таблице $n \times n$ распоређено је $2n - 1$ жетона. Доказати да се неки од ових жетона могу обојити у зелено тако да (1) у свакој врсти и свакој колони има паран број зелених жетона, или (2) у свакој врсти и свакој колони има непаран број зелених жетона.

24. У координатној равни је дато 2013 квадрата странице 1 са страницама паралелним осама. Доказати да збир површина свих области које су покривене непарним бројем квадрата није мањи од 1.

Теорија бројева

25. Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји n међусобно различитих целих бројева чији је збир квадрата једнак збиру кубова.

26. Дати су реални бројеви a_i, b_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Дефинишимо $x_n = [a_1 n + b_1] + \cdots + [a_k n + b_k]$. Ако је низ $x_1, x_2, \ldots$ аритметичка прогресија, доказати да је $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ цео број.

27. За природан број n означимо са b_n број јединица у бинарном запису n. Кажемо да је n *уображен* ако $b_n \mid n$. Доказати да (а) не постоји 5 узастопних природних бројева који су сви уображени; (б) постоји бесконачно много тројки узастопних природних бројева који су сви уображени.

28. Наћи све парове природних бројева a, b за које важи $2^a + 17 = b^4$.

29. Дат је природан број $n \geqslant 2$. Наћи најмањи природан број m за који постоје природни бројеви $a_1 < a_2 < \cdots < a_n = m$ такви да је $\frac{1}{2}(a_i^2 + a_{i+1}^2)$ потпун квадрат за $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

30. Нека су x и $y < x$ природни бројеви. Ако је $x^2 + y^2 - 2$ дељиво са $x^2 - y^2$, доказати да $x^2 + y^2 - 2$ и $x^2 - y^2$ имају исте скупове простих делилаца.

31. Нека су a и b узајамно прости непарни природни бројеви. Наћи све могуће вредности броја НЗД$(2^a + 2^{\frac{a+1}{2}} + 1, 2^b + 2^{\frac{b+1}{2}} + 1)$.

32. Низ $a_1 = 1, a_2, a_3 \ldots$ је дефинисан на следећи начин: за $n \geqslant 2$, a_n је најмањи природан број који се не појављује међу бројевима $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ такав да $n \mid a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Доказати да је $a_{a_n} = n$.

Решења

1. Претпоставимо без смањења општости (у супротном је довољно посматрати бројеве $1-x_0,\dots,1-x_{100}$) да је аритметичка средина датих бројева бар $\frac{1}{2}$. Ставимо $x_0=0$ у једну групу, а остале бројеве у другу. Како је $x_1+\dots+x_{100}\geqslant\frac{101}{2}$, аритметичка средина у другој групи је бар $\frac{101}{200}$, а у првој је 0.

2. За $x\in\mathbb{Z}$ одаберимо x,y тако да је $x+y=z$ и $f(x+y)=-y$, тј. $x=z+f(z)$. Дата функционална једначина постаје $f(z+f(z))=0$. Даље, за $x\in\mathbb{R}$ и $y=0$ полазна једначина даје $f(x)+f(x)^2=f(x+f(x))=0$, дакле $f(x)\in\{0,-1\}$. Међутим, ако за неке x,z важи $f(x)=-1$, $f(z)=0$, стављањем $y=x-z$ у полазну једначину добијамо $f(x+f(x+y))=1$, што је немогуће. Дакле, функција f је константно једнака 0.

3. Функција $f(x)=\frac{x}{x+1}$, тј. $f(\frac{p}{q})=\frac{p}{p+q}$ $(p,q\in\mathbb{N})$ задовољава услове задатка. Показаћемо индукцијом по $n=p+q$ да је $f(\frac{p}{q})$ једнозначно одређено (и самим тим једнако $\frac{p}{p+q}$).

   За почетак имамо $f(1)=\frac{1}{2}$, а затим из $f(2)=2f(f(1))=2f(\frac{1}{2})=2-2f(2)$ имамо и $f(2)=\frac{2}{3}$ и $f(\frac{1}{2})=3$. Дакле, тврђење важи за $n\leqslant 3$.

   - Нека $2\mid n$. Како је $f(\frac{p}{q})=1-f(\frac{q}{p})$, довољно је испитати случај $p<q$. Тада је $f(\frac{p}{q})=f(f(\frac{p}{q-p}))=\frac{1}{2}f(\frac{p}{\frac{q-p}{2}})=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p+\frac{q-p}{2}}=\frac{p}{p+q}$ по индукцијској претпоставци.
   - Нека $2\nmid n$. Ако $2\nmid p$, онда $2\mid q$ и $f(\frac{p}{q})=1-f(\frac{q}{p})$. Зато ћемо сматрати да $2\mid p=2k$. Имамо $f(\frac{2k}{n-2k})=2f(f(\frac{k}{n-2k}))=2f(\frac{k}{n-k})=2-2f(\frac{n-k}{k})$. Дефинишимо низ
   $$a_0=k \quad \text{и} \quad a_{i+1}=\begin{cases}\frac{a_i}{2} & \text{ако } 2\mid a_i;\\ \frac{n-a_i}{2} & \text{ако } 2\nmid a_i.\end{cases}.$$
   Како a_{i+1} једнозначно одређује a_i, низ (a_i) је периодичан, те је $a_m=a_0$ за неко $m>0$. По претходном важи $f(\frac{2a_i}{n-2a_i})=1-c_i+2c_if(\frac{2a_{i+1}}{n-2a_{i+1}})$ за све i, где је $c_i\in\{-1,1\}$. Поновљеном применом ове једнакости добијамо $f(\frac{2a_0}{n-2a_0})=A+Bf(\frac{2a_m}{n-2a_m})$, тј. $f(\frac{2k}{n-2k})=A+Bf(\frac{2k}{n-2k})$ за неко A,B $(B=\pm 2^m)$, па ова једнакост једнозначно одређује $f(\frac{2k}{n-2k})$.

   Овим је индукција завршена.

4. Лева страна неједнакости није већа од $(ab+bc+cd+da)(a^2+b^2+c^2+d^2)\leqslant\frac{1}{8}(a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+bc+cd+da))^2\leqslant\frac{1}{8}(a+b+c+d)^2=2$. Једнакост се достиже за $(a,b,c,d)=(1,1,0,0)$ и цикличне распореде.

5. Посматрањем полинома $Q(x)=P(nx)$ тврђење се своди на следеће: ако је Q полином степена n и $|Q(x)|\leqslant 1$ за $0\leqslant x\leqslant n$, онда је $Q(-1)\leqslant 2^{n+1}-1$. Доказаћемо ово тврђење индукцијом по n.

   База $n=0$ је тривијална. Претпоставимо да тврђење важи за $n-1$ и нека је $\deg Q=n$ и $|Q(x)|\leqslant 1$ за $0\leqslant x\leqslant n$. Тада полином $R(x)=\frac{1}{2}(Q(x)-Q(x+1))$ има степен $n-1$ и задовољава услов $|R(x)|\leqslant 1$ за $0\leqslant x\leqslant n-1$, па је по индуктивној претпоставци $\frac{1}{2}(Q(-1)-1)\leqslant R(-1)\leqslant 2^n-1$, тј. $Q(-1)\leqslant 2^{n+1}-1$.

6. Замена $x=y=1$ даје $f(f(1))=f(1)$. Сада замена $x=1$, $y=f(1)$ даје $f(1)^2=f(1)$. Али ако је $f(1)=1$, стављањем $y=1$ добијамо $f(x)=x$ за све x, противно услову ограничености. Дакле, $f(1)=0$. Даље, убацивањем $x=1$ сада добијамо $f(f(y))=2f(y)$. То значи да ако $t\in S=\{f(x)\mid x\in\mathbb{R}\}$, онда и $2t\in S$, а одатле индукцијом $2^nt\in S$. Како је скуп S ограничен одозго, мора бити $t\leqslant 0$, тј. $f(x)\leqslant 0$ за све x.

   Убацивањем $(\frac{x}{2},f(y))$ у полазну једначину уместо (x,y) добијамо $f(xy)-yf(x)=f(xf(y))-xf(y)=f(\frac{x}{2}f(y))-f(\frac{x}{2})f(y)\leqslant 0$ јер су вредности f непозитивне; следи да је $f(xy)\leqslant yf(x)$ за све x,y. За $y=\frac{1}{x}$ и $x>0$ последња релација постаје $f(x)\geqslant 0$, дакле $f(x)=0$ за $x>0$. Такође је $f(0)=f(f(1))=2f(1)=0$.

   Претпоставимо сада да је $f(b)\neq 0$ за неко $b<0$. Како је $f(b)<0$, за $x<0$ имамо $f(xf(b))=f(2xf(b))=0$, па заменом $y=f(b)$ у полазну једначину добијамо $2xf(b)-f(b)f(x)=0$, одакле је $f(x)=2x$. Према томе, имамо две могућности за f:
   $$f_1(x)=0 \text{ за све } x \qquad \text{или} \qquad f_2(x)=\begin{cases}2x & \text{за } x<0;\\ 0 & \text{за } x\geqslant 0.\end{cases}$$
   Функција f_1 је тривијално решење. Функција f_2 такође задовољава полазну једначину. Заиста, ако означимо $L=f(xf(y))+yf(x)$ и $D=xf(y)+f(xy)$, за $x,y\geqslant 0$ је $L=D=0$, за $x\geqslant 0>y$ је $L=D=4xy$, за $x<0\leqslant y$ је $L=D=2xy$, и за $x,y<0$ је $L=D=2xy$.

7. Означимо $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$. Како је $\frac{1}{1-x^k}=\lim_{m\to\infty}(1+x+x^2+\cdots+x^k)$ за $0\leqslant x<1$, важи

$$0=\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{1-x^{i+1}}=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=0}^{n}a_i(1+x^{i+1}+\cdots+x^{m(i+1)})=\lim_{m\to\infty}(P(1)+xP(x)+\cdots+x^mP(x^m)).$$

Пошто нису сви сабирци $x^iP(x^i)$ једнаки 0, међу њима мора бити и позитивних и негативних. Дакле, P мења знак у интервалу $[0,1]$, па има нулу унутар тог интервала.

8. Нека је L лева страна неједнакости. Доказаћемо да је $nL-\frac{n(n-1)}{2}=\sum_{i<j}\frac{a_ia_j}{n-a_ia_j}\leqslant\frac{n}{2}$.

Као прво, приметимо да је $a_i^2\leqslant n$; притом, ако је $a_i^2=n$, онда је $a_j=0$ за $j\neq i$, па неједнакост тривијално важи. Зато сматрамо да је $a_i<\sqrt{n}$ и самим тим $n-a_ia_j>0$. Како је $a_ia_j\leqslant\frac{(a_i+a_j)^2}{4}$ и $a_ia_j\leqslant\frac{a_i^2+a_j^2}{2}$, на основу Коши-Шварцове неједнакост важи

$$\frac{2a_ia_j}{n-a_ia_j}\leqslant\frac{(a_i+a_j)^2}{(n-a_i^2)+(n-a_j^2)}\leqslant\frac{a_i^2}{n-a_j^2}+\frac{a_j^2}{n-a_i^2}.$$

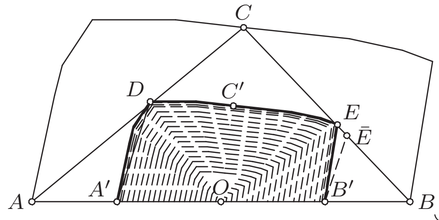
Сабирањем по свим паровима $i<j$ добијамо тражену неједнакост.

9. Са p_{XYZ} ћемо означавати обим $\triangle XYZ$. Нека је без смањења општости $BD<CE$ и нека су A' и D' редом тачке симетричне тачкама A и D у односу на средиште странице BC. Како је $p_{ADD'}\geqslant p_{ADE}$, довољно је доказати да важи $p_{ABC}>p_{ADD'}+2BD$, што је опет еквивалентно са $AB+AC>AD+AD'$, тј. $AB+BA'>AD+DA'$. Последња неједнакост следи из $AB+BA'>AK+KA'>AD+DA'$, где је K пресек правих $A'D$ и AB.

10. Означимо $\sphericalangle BAC=\alpha$. Како је $\sphericalangle NKL=\sphericalangle NDL=\sphericalangle ADC-90^\circ=90^\circ-\alpha$ и аналогно $\sphericalangle NLK=90^\circ-\alpha$, следи $NK=NL$ и $\sphericalangle KNL=2\alpha=2\sphericalangle KCL$, па је N центар круга KLC.

11. Како је $\sphericalangle BMC=\sphericalangle BHC$, где је H ортоцентар $\triangle ABC$, тачка M лежи на кругу BCH. Сматрамо без смањења општости да је M на краћем луку BH. Нека круг над пречником AH сече круг BCH у тачки $F\neq H$. Како је $\sphericalangle AFM=90^\circ+\sphericalangle HFM=\sphericalangle BAC+\sphericalangle ACH+\sphericalangle HCM=180^\circ-\sphericalangle AEM$, тачке A,E,M,F су на истом кругу. Слично је и тачка D на том кругу, па описани круг троугла ADE увек пролази кроз тачку F.

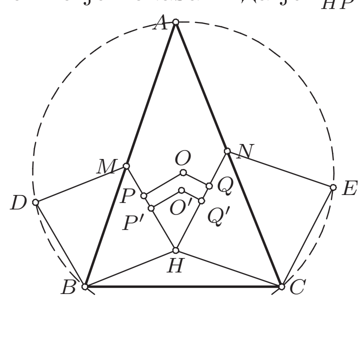
12. Нека су стражари у тачкама A и B. Претпоставимо да ниједан од њих не види тачку C на обали, јер је она заклоњена стражарима у A и B редом тачкама D и E на острву. Означимо са A',B',C' редом средишта дужи OA,OB,OC. Такође, нека је $\bar{E}$ тачка на дужи BC таква да је $B'\bar{E}\parallel A'D$. Како је $\sphericalangle B'A'D+\sphericalangle A'B'E\leqslant180^\circ$, $\bar{E}$ припада дужи BE. Тачка C' лежи унутар или на



граници $\triangle CDE$, и самим тим је унутар или на граници $\triangle CD\bar{E}$. Означимо $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\frac{CD}{CA}=k$ и $\frac{CE}{CB}=\ell$. Тада је $\overrightarrow{CC'}=\frac14(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{4k}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{4\ell}\overrightarrow{C\bar{E}}$, па је C' унутар или на граници $\triangle CD\bar{E}$ ако и само ако је $k,\ell\geqslant0$ и $\frac{1}{4k}+\frac{1}{4\ell}\leqslant1$, тј. $k+\ell\leqslant4k\ell$. С друге стране, $\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{DC}=(\frac34-k)\vec{a}+\frac14\vec{b}$ је паралелно са $\overrightarrow{\bar{E}B'}=\frac14\vec{a}+(\frac34-\ell)\vec{b}$, па је $(\frac34-k)(\frac34-\ell)=\frac{1}{16}$, тј. $2-3(k+\ell)+4k\ell=0$, одакле следи $k+\ell\leqslant1$ и $4k\ell-(k+\ell)=2(k+\ell)-2\leqslant0$. Зато је једино могуће да су све горње неједакости заправо једнакости, па је $k=\ell=\frac12$, али тада је део острва изнад праве AB четвороугао $A'D\bar{E}B'$, супротно претпоставци да је стоугао.

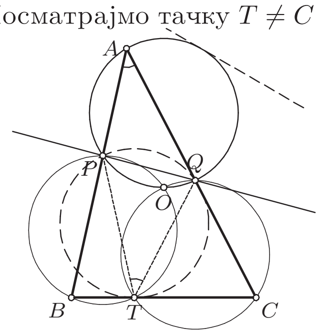
13. Нека је O' центар круга MNH, P и P' редом подножја нормала из O и O' на HM, а Q и Q' редом подножја нормала из O и O' на HN. Довољно је показати да је $\frac{HP'}{HP}=\frac{HQ'}{HQ}$.

Нека су D и E редом тачке симетричне тачки H у односу на AB и AC. Тачке D и E су на описаном кругу троугла ABC. Како је $\sphericalangle HMB=\sphericalangle HCA=\sphericalangle HBM$, важи $HM=HB$, па је $HBDM$ ромб; аналогно је $HCEN$ ромб, и притом је $HBDM\sim HCEN$ јер је $\sphericalangle BHM=\sphericalangle CHN=2\sphericalangle A$. Приметимо да тачке P и Q леже на симетралама дужи BD и CE редом јер је $OP\perp BD$ и



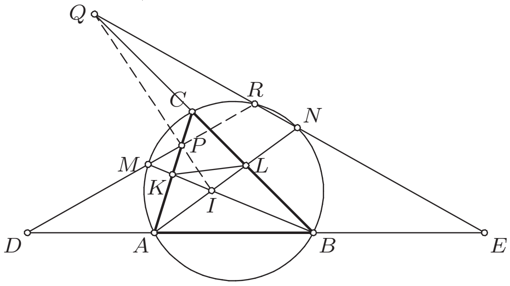
$OQ \perp CE$. Тачке P' и Q' су средишта дужи HM и HN. Према томе, тачкама P, P' у ромбу $HBDM$ одговарају тачке Q, Q' у ромбу $HCEN$, па је $\frac{HP'}{HP} = \frac{HQ'}{HQ}$.

14. Углове $\triangle ABC$ означавамо уобичајено са α, β, γ. Како је $\sphericalangle POQ = 360^\circ - \sphericalangle BOP - \sphericalangle COQ - \sphericalangle BOC = 180^\circ - \alpha$, тачке A, P, O, Q су на истом кругу. Посматрајмо тачку $T \neq C$ на правој BC такву да је $PT = PB$. Из $\sphericalangle BTP = \sphericalangle BOP$ следи да су тачке O, P, B, T на кругу, па је O Микелова тачка за P, Q, T. Одавде су и тачке O, Q, C, T конциклични, па имамо $\sphericalangle PTQ = \sphericalangle BOC - \sphericalangle BAC = \alpha$. Према томе, круг PQT је симетричан кругу APQ у односу на праву PQ.



Остаје да приметимо да права BC додирује круг PQT: заиста, $\sphericalangle PQT = \sphericalangle AOC - \sphericalangle ABC = \beta = \sphericalangle PTB$. Одавде одмах следи тврђење задатка.

15. Нека BM и AN секу наспрамне странице троугла редом у K и L. Из сличности троуглова BCM и BKA ($\sphericalangle BMC = \sphericalangle BAK$, $\sphericalangle CBM = \sphericalangle KBA$) имамо $BK \cdot BM = BA \cdot BC$; осим тога, због $CD \parallel AL$ важи $BA/BD = BL/BC$. Следи $BK \cdot BM = BL \cdot BD$, што заједно са $\sphericalangle DBM = \sphericalangle KBL$ даје $\triangle BDM \sim \triangle BKL$. Аналогно, $\triangle AEN \sim \triangle ALK$.



Нека се DM и EN секу у R. Из добијених сличности имамо $\sphericalangle RDE = \sphericalangle MDB = \sphericalangle LKB$ и $\sphericalangle DER = \sphericalangle AEN = \sphericalangle ALK$, па је $\sphericalangle NRM = 180^\circ - \sphericalangle RDE - \sphericalangle DER = 180^\circ - \sphericalangle LKB - \sphericalangle ALK = \sphericalangle KIL = \sphericalangle BIA = 180^\circ - \sphericalangle IAB - \sphericalangle ABI = 180^\circ - \sphericalangle CAN - \sphericalangle MBC = \sphericalangle NCM$ (углови су оријентисани). Према томе, R је на описаном кругу $\triangle ABC$. Сада колинеарност тачака I, P, Q следи из Паскалове теореме за шестоугао $ACBMRN$.

16. Како је $\sphericalangle OAM + \sphericalangle AMN = \sphericalangle DAN + \sphericalangle ADN = 90^\circ$, тетива PQ је нормална на OA, па је A средиште лука PQ. Следи да је RA симетрала угла PRQ.

Из $\sphericalangle ABP = \sphericalangle AQP = \sphericalangle APM$ следи да су троуглови ABP и APM слични, па је $AP^2 = AB \cdot AM = AD^2$, дакле $AD = AP = AQ$, па на основу Великог задатка закључујемо да је D центар уписаног круга $\triangle PQR$.

17. Фиксирајмо $i \in \{1, \dots, 4n\}$. Елемент $j = \sigma(i)$ је различит од i и $4n+1-i$ и може се одабрати на $4n-2$ начина. Избором i и j једнозначно су одређени $\sigma^2(i) = 4n+1-i$ и $\sigma^3(i) = 4n+1-j$, док је $\sigma^4(i) = i$. Даље, за произвољан елемент $k \notin \{i, j, 4n+1-i, 4n+1-j\}$, број $l = \sigma(k)$ се може одабрати на $4n-6$ начина ($l \neq 4n+1-k$), чиме су аутоматски одређени $\sigma^2(k)$ и $\sigma^3(k)$. Настављајући овај поступак закључујемо да се тражена партиција може конструисати на тачно $(4n-2)(4n-6)\cdots 6 \cdot 2$ начина, што је једнако $\frac{(2n)!}{n!}$.

18. Доделимо интервалу $[i, j]$ збир $i + j$. Не постоје два интервала којима је додељен исти број, па како су сви додељени бројеви природни и не већи од 4025, интервала нема више од 4025. Пример са 4025 интервала добијамо узимањем свих интервала са једним крајем 0 или 2013.

19. Ротирајмо координатни систем непрекидно у константном смеру. Редослед пројекција тачака A и B на x-оси ће се променити кад y-оса прође кроз положај паралелан правој AB, што ће се догодити двапут при ротацији за угао 2π. Како правих одређених са по две од датих тачака има 45, добићемо највише 90 различитих пермутација.

20. Посматрајмо произвољно теме графа. За сваке две гране из тог темена, постоје највише два цикла дужине 4 који садрже те две гране. Дакле, има највише 6 циклова кроз посматрано теме, па укупно не може бити више од $\frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 300 = 450$ циклова.

Овај број се достиже када имамо 50 независних графова $K_{3,3}$.

21. Посматрајмо оријентисани граф чија су темена елементи $A \cup B$, а грана од i до j постоји ако је $j = i - a \in A$ или $j = i + b \in B$. По услову задатка, излазни степен сваког темена је бар 1, а улазни је највише 1 јер је $A \cap B = \emptyset$. Како је збир улазних степена једнак

збиру излазних, из сваког темена излази и у њега улази тачно једна грана. То значи да је овај граф унија дисјунктних циклова $C_1, \dots, C_k$.

Нека цикл C_i садржи a_i елемената скупа A и b_i елемената B. Тада се дуж грана цикла C_i индекси темена увећавају за a тачно a_i пута, а умањују се за b тачно b_i пута, одакле је $aa_i = bb_i$. Како ово важи за сваки цикл, следи $a|A| = b|B|$.

22. Поставимо редом n кругова тако да је, за $2 \leqslant i \leqslant n-1$, круг C_i унутар круга C_{i-1} и пролази кроз његов центар, а круг C_n има центар на C_1 и пролази кроз центар C_{n-1}. Овако добијамо пример са $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ парова (i,j).

    Скуп G посматраних парова има следеће особине: (1) $(i,i) \notin G$; (2) $(2,1),(3,2),\dots,(1,n) \notin G$; (3) $(i,j),(j,k) \in G \Rightarrow (i,k) \in G$; (4) $(i,j) \in G \Rightarrow (j,i) \notin G$. Доказаћемо индукцијом по n (база $n=2$) да скуп G са особинама (1)-(4) има највише $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ елемената.

    Ако ниједан од парова $(1,2),(2,3),\dots,(n,1)$ није у G, онда је $|G| \leqslant \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$. Зато претпоставимо да нпр. $(n,1) \in G$. Тада $(1,n-1) \notin G$ (у супротном би из (3) следило $(n,n-1) \in G$), па скуп $G' = \{(i,j) \in G \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n-1\}$ задовољава (1)-(4) за $n-1$, и по индуктивној претпоставци је $|G'| \leqslant \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Остаје да покажемо да је $|G \setminus G'| \leqslant n-2$: одатле ће следити $|G| \leqslant \frac{(n-2)(n-3)}{2} + (n-2) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

    Претпоставимо да је $|G \setminus G'| = n-1$. Тада за свако $i = 1,\dots,n-1$ тачно један од парова $(i,n),(n,i)$ припада G. Како $(n,n-1) \notin G$, важи $(n-1,n) \in G$. Ако $(n,n-2) \in G$, онда из (3) следи $(n-1,n-2) \in G$, што није тачно; дакле, $(n,n-2) \notin G$ и $(n-2,n) \in G$. Слично, $(n,n-3) \notin G$ и $(n-3,n) \in G$, итд, и најзад $(n,1) \notin G$ и $(1,n) \in G$, контрадикција.

23. За $k = 1,\dots,2n-1$, нека је $a^k_i = b^k_j = 1$ ако се k-ти жетон налази у i-тој врсти и j-тој колони, и $a^k_{i'} = a^k_{j'} = 0$ за $i' \neq i$ и $j' \neq j$. Посматрајмо векторе $v_k = (a^k_1,\dots,a^k_n,b^k_1,\dots,b^k_{n-1})$ у векторском простору $\mathbb{Z}_2^{2n-1}$. Ако постоје $1 \leqslant k_1 < k_2 < \dots < k_r \leqslant 2n-1$ такви да је $v_{k_1} + \dots + v_{k_r}$ једнако вектору $\vec{0} = (0,\dots,0)$ (односно $\vec{1} = (1,\dots,1)$), онда бојењем жетона $k_1,\dots,k_r$ у зелено постижемо да у n врста и $n-1$ колона, а самим тим и у преосталој колони, има паран (непаран) број зелених жетона.

    Ако су вектори $v_1,\dots,v_{2n-1}$ линеарно зависни, то значи да постоје $\epsilon_1,\dots,\epsilon_{2n-1} \in \{0,1\}$ такви да је $\sum_{i=1}^{2n-1} \epsilon_i v_i = (0,0,\dots,0) = \vec{0}$. У супротном, сваки вектор у $\mathbb{Z}_2^{2n-1}$ се може представити у облику њихове линеарне комбинације; дакле, $\sum_{i=1}^{2n-1} \epsilon_i v_i = (1,1,\dots,1)$ за неке $\epsilon_i = \{0,1\}$, чиме је доказ завршен.

24. За сваку тачку A у равни дефинишимо $S[A]$ као скуп свих тачака које се добијају транслацијом тачке A за неки вектор (i,j), $i,j \in \mathbb{Z}$. Ако ниједна тачка скупа $S[A]$ не лежи на граници неког од датих квадрата, видимо да сваки квадрат покрива тачно једну тачку из $S[A]$. Како је број квадрата непаран, бар једна тачка у $S[A]$ је покривена непаран број пута. То значи да се транслатима делова области покривених непаран број пута може покрити јединични квадрат; дакле, њихова укупна површина је бар 1.

25. За $n = 3$ можемо да конструишемо бесконачно много примера (x,y,z) стављајући $y = -z$: тада услов задатка постаје $x^2 + 2y^2 = x^3$, тј. $2(\frac{y}{x})^2 = x - 1$, што за $\frac{y}{x} = k$ даје $(x,y,z) = (2k^2+1, k(2k^2+1), -k(2k^2+1))$.

    Сада пример за $n = 3r$ можемо добити узимајући унију r дисјунктних тројки овог облика (такве се очигледно могу изабрати). За $n = 3r+1$ или $3r+2$ довољно је овој $3r$-торки додати нулу, јединицу или оба.

26. Нека је $x_n = an + b$ за неке константе $a,b \in \mathbb{Z}$. Означимо $A = a_1 + \dots + a_k$ и $B = b_1 + \dots + b_k$. Из $a_i n + b_i - 1 \leqslant [a_i n + b_i] \leqslant a_i n + b_i$ сабирањем за $1 \leqslant i \leqslant k$ следи $An + B - k \leqslant x_n \leqslant An + B$, тј. $B - b - k \leqslant (a - A)n \leqslant B - b$ за све n, што је могуће једино ако је $A = a$.

27. (а) За $k \in \mathbb{N}$ бројеви $4k+1$ и $4k+2$ не могу истовремено да буду уображени јер је $b_{4k+2} = b_{4k+1} > 1$. Међутим, међу ма којих 5 узастопних бројева налазе се $4k+1$ и $4k+2$ за неко k.

    (б) Подесићемо n тако да $n-1, n, n+1$ буду уображени са $b_{n-1} = 7$, $b_n = 4$ и $b_{n+1} = 5$. Тражимо n облика $2^{4a} + 2^{4b} + 2^{4c} + 2^4$ јер тада $4 \mid n$ и $5 \mid n+1$; још треба одабрати a,b,c тако да $7 \mid n - 1 \equiv 2^a + 2^b + 2^c + 1$, а за то је довољно узети $a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod 3$.

    Напомена. Уз малу измену добијамо јачи пример: за $n = 2^{12a+16} + 2^{12b+10} + 2^{12c+7} + 14$ ($a,b,c \in \mathbb{N}$) бројеви $n, n+1, n+2, n+3$ су сви уображени.

28. Посматрајмо једначину по модулу 17: из $2^{4a} \equiv b^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ следи да $8 \mid 4a$, тј. $2 \mid a$, па је $17 = (b - 2^{a/2})(b + 2^{a/2})$. Одавде долазимо до јединог решења $(a, b) = (6, 9)$.

29. Означимо тражено m са m_n. Имамо $m_1 = 1$ и $m_2 = 7$: $\frac{1}{2}(1^2 + 7^2) = 5^2$. Пример $a_i = 2i^2 - 1$ показује да је $m_n \leqslant 2n^2 - 1$: заиста, тада је $\frac{1}{2}(a_i^2 + a_{i+1}^2) = (2i^2 + 2i + 1)^2$.

   Да бисмо доказали да је $m_n = 2n^2 - 1$, довољно је да покажемо да не постоје природни бројеви $2n^2 - 1 \leqslant x < y < 2(n+1)^2 - 1$ такви да је $\frac{x^2+y^2}{2}$ потпун квадрат. Претпоставимо супротно, да је $x^2 + y^2 = 2z^2$. Тада су x и y исте парности и $y - x < 4n + 2$, па важи $(\frac{x+y}{2})^2 < z^2 = (\frac{x+y}{2})^2 + (\frac{y-x}{2})^2 \leqslant (\frac{x+y}{2})^2 + (2n)^2$, одакле следи $(\frac{x+y}{2})^2 + (2n)^2 \geqslant (\frac{x+y}{2} + 1)^2$, тј. $4n^2 \geqslant x + y + 1$, што је немогуће.

30. За неки природан број n важи $x^2 + y^2 - 2 = n(x^2 - y^2)$, тј.
$$(n+1)y^2 - (n-1)x^2 = 2. \qquad (*)$$
   Довољно је показати да је $x^2 - y^2$ дељиво са n.

   Претпоставимо супротно, да постоји решење (x, y) једначине $(*)$ за које $n \nmid x^2 - y^2$, и посматрајмо оно решење (x_0, y_0) за које је $|y_0|$ минимално. Приметимо да ако је (x, y) решење $(*)$, онда је и $(nx - (n+1)y, ny - (n-1)x)$ решење. Шта више, ако $n \nmid (x^2 - y^2)$, онда $n \nmid (nx - (n+1)y)^2 - (ny - (n-1)x)^2 \equiv y^2 - x^2 \pmod{n}$. Према томе, по услову минималности мора да буде $|ny_0 - (n-1)x_0| \geq |y_0|$, тј. $x_0 \leq y_0$ или $x_0 \geq \frac{n+1}{n-1} y_0$. Замењивањем у $(*)$ се добија $|y_0| \leq 1$, а то је могуће једино за $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Међутим, $n \mid 1^2 - 1^2$, што је контрадикција.

31. Приметимо да је $(2^a + 2^{\frac{a+1}{2}} + 1)(2^a - 2^{\frac{a+1}{2}} + 1) = (2^a + 1)^2 - 2^{a+1} = 2^{2a} + 1$. Следи да је $d = (2^a + 2^{\frac{a+1}{2}} + 1, 2^b + 2^{\frac{b+1}{2}} + 1) \mid (2^{2a} + 1, 2^{2b} + 1) \mid (2^{4a} - 1, 2^{4b} - 1) = 2^{(4a, 4b)} - 1 = 15$. Притом $3 \nmid 2^{2a} + 1$, па имамо $d \mid 5$.

   Могуће вредности су 1 и 5. За $a = b = 1$ је $d = 5$, док је за $(a, b) = (1, 3)$ $d = 1$.

32. Почетни чланови низа су $1, 3, 2, 6, 8, 4, 11, 5, \dots$. Видимо да је $a_i = j$ и $a_j = i$ за $(i, j) = (1, 1), (2, 3), (4, 6), (5, 8), (7, 11), \dots$. Уведимо низ парова $P_0, P_1, P_2, \dots$ природних бројева ($P_i = \{f_i, g_i\}$) на следећи начин: $P_0 = (1, 1)$ и, за $n \geqslant 0$, f_n је најмањи број који се не појављује у паровима $P_0, \dots, P_{n-1}$, а $g_n = f_n + n$. Низови (f_n) и (g_n) су растући и сваки природан број припада тачно једном пару. Дефинишимо низ b_n релацијама $b_{f_n} = g_n$ и $b_{g_n} = f_n$. Тада је $b_{b_n} = n$, при чему је $\{n, b_n\} = P_{|n - b_n|}$. Доказаћемо да је $b_n = a_n$.

   Лема. За свако $n \in \mathbb{N}$, $n \mid b_1 + b_2 + \cdots + b_n$.

   Доказ. Нека су k и K редом најмање и највеће i са $f_i \leqslant n \leqslant g_i$. Тада је $\{1, 2, \dots, n\} = \{f_0, f_1, \dots, f_K\} \cup \{g_1, g_2, \dots, g_{k-1}\}$, одакле је $n = K + k$. С друге стране, скуп $\{b_1, \dots, b_n\}$ садржи g_i ако је $f_i \leqslant n$ (тј. $i \leqslant K$), и садржи f_i ако је $g_i \leqslant n$ (тј. $i \leqslant k - 1$). Дакле, $\{b_1, \dots, b_n\} = \{f_0, f_1, \dots, f_{k-1}\} \cup \{g_1, g_2, \dots, g_K\}$. Како је $g_i = f_i + i$, закључујемо да је $\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{j=1}^{n} j + \sum_{i=k}^{K} i = n(n - k)$. $\square$

   Претпоставимо да је $b_i = a_i$ за $1 \leqslant i \leqslant n - 1$, али $b_n \neq a_n$. По дефиницији низова $(a_n), (b_n)$ имамо $n \mid b_n - a_n > 0$, па због $b_n < 2n$ мора бити $a_n = b_n - n$, па је $\{b_n, n\} = P_{a_n}$. То значи да су се сви бројеви мањи од n, па тако и a_n, већ појавили у паровима $P_1, \dots, P_{a_n - 1}$. Нека $a_n \in P_k$. Како је $a_n \notin \{b_1, \dots, b_{n-1}\}$, мора бити $f_k = a_n$ и $g_k \geqslant n = f_{a_n}$. Међутим, парови $P_1, \dots, P_k$ покривају по два елемента скупа $A = \{2, \dots, g_k\}$, док сваки од $f_k - k = g_k - 2k$ парова $P_{k+1}, \dots, P_{f_k} = \{n, b_n\}$ покрива по један елемент A, чиме је покривено укупно $2k + (g_k - 2k) = g_k$ елемената скупа A, а то је немогуће.

   Напомена. Може се показати да је $a_n = [n\phi]$ ако је $n = [k\phi] + 1$ за неко $k = 0, 1, 2, \dots$, и $a_n = [n\phi^{-1}] + 1$ у супротном, где је $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.