Задаци за самосталан рад

(припремио Душан Ђукић)

Покушао сам, вероватно неуспешно, да унутар сваке области сортирам задатке од лакших ка тежим.
Радите их сами и пробајте сваки. Дајем вам 10 дана за рад. Лепо се забавите.

Алгебра

1. Нека је $P(x)$ полином са реалним коефицијентима. Ако постоји цео број t за који $P(t)$ није цео број, доказати да таквих целих бројева t има бесконачно много.

2. Решити једначину $\cos 9x = 16\cos x$ у скупу реалних бројева.

3. Нека је S скуп свих целих бројева већих од 1. Да ли постоји функција $f : S \to S$ таква да за све $a, b \in S$ $(a \neq b)$ важи $f(a)f(b) = f(a^2b^2)$?

4. Низ (a_n) је дефинисан на следећи начин: $a_1 = a$ и $a_2 = b$, где су $a, b \in \mathbb{N}$, а за $n \geqslant 2$ члан a_{n+1} је једнак броју чланова низа једнаких a_n међу $a_1, a_2, \dots, a_n$. Одредити све парове (a, b) за које је низ $(a_n + a_{n+1})$ неопадајући почев од неког места.

5. Ако су a, b, c позитивни бројеви и $abc = 1$, доказати неједнакост $\sqrt{\frac{a+b}{a+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geqslant 3$.

6. Одредити најмање $n \in \mathbb{N}$ за које постоји низ $a_0, a_1, \dots, a_n$ такав да је a_0 цео број, a_{k+1} је једнако $2a_k + 1$ или $\frac{a_k}{a_k+2}$ за свако $k \in \mathbb{N}_0$, и $a_n = 2014$.

7. Нека је A коначан скуп функција из $\mathbb{R}$ у $\mathbb{R}$ са следећим својствима:
(1) ако су $f, g \in A$, онда је $f \circ g \in A$;
(2) за свако $f \in A$ постоји $g \in A$ тако да важи $f(f(x) + y) = 2x + g(g(y) - x)$.
Доказати да идентитет-функција h_0 (тј. $h_0(x) = x$ за све x) припада скупу A.

8. Ако су a, b, c позитивни реални бројеви и $x = \frac{b-c}{a}$, $y = \frac{c-a}{b}$ и $z = \frac{a-b}{c}$, доказати неједнакост $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 2\sqrt{2}(x + y + z)$.

Геометрија

9. У троуглу ABC угао код темена A је најмањи. Тачке D и E на страницама AB и AC су такве да је $\sphericalangle DCB = \sphericalangle EBC = \sphericalangle BAC$. Доказати да средишта дужи AB, AC, BE и CD леже на истом кругу.

10. У оштроуглом троуглу ABC тачке A_1 и B_1 су редом подножја висина из A и B, а H је ортоцентар. Нека су k_1 и k_2 редом кругови са центрима у B и H које пролазе кроз B_1. Тангенте из тачке C на кругове k_1 и k_2, различите од праве AC, додирују кругове k_1 и k_2 у тачкама K и N, редом. Доказати да права KN садржи тачку A_1.

11. Дат је троугао ABC. Права кроз средиште K странице BC сече страницу AB и полуправу AC редом у тачкама M и L. Нека је N средиште дужи LM. Права AN сече описани круг троугла ABC у тачки $S \neq A$. Ако су тачке K, N, S различите, доказати да описани круг троугла KNS додирује праву BC.

12. Троугао T је подељен на коначан број троуглова сличних њему. Тако је сваки од троуглова у подели добијен из троугла T хомотетијом са неким коефицијентом (позитивним или негативним). Доказати да је збир ових коефицијената једнак 1.

13. Круг k кроз темена A и C троугла ABC додирује праву AB и сече страницу BC у тачки P. Нека је ℓ тангента на круг k у тачки P. Симетрала угла код темена B сече праве ℓ и AP редом у тачкама K и L. Доказати да је $\sphericalangle LAK = \sphericalangle LCB$.

14. Уписани круг оштроуглог троугла ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама K и L. Симетрале углова код темена B и C редом секу висину AD $(D \in BC)$ у тачкама P и Q. Доказати да су дужине тангенти из средишта висине AD на кругове BKP и CLQ једнаке.

15. Нека је D тачка на страници AB троугла ABC, а k описани круг троугла. Круг k_1 са центром I додирује дужи BD и CD и круг k, а круг k_2 са центром J додирује дужи AD и CD и круг k. Ако су тачке A, B, I, J концикличне, доказати да је D тачка додира приписаног круга троугла ABC наспрам темена C.

16. Кругови ω и Ω се секу у тачкама A и B. Нека је M средиште лука AB круга ω који лежи унутар круга Ω. Тетива MP круга ω сече круг Ω у тачки Q (унутар ω). Нека је ℓ_P тангента на ω у тачки P, а ℓ_Q тангента на Ω у тачки Q. Доказати да описани круг троугла одређеног правим ℓ_P, ℓ_Q и AB додирује круг Ω.

Комбинаторика

17. Деци је дато укупно 2^n новчића. У једном потезу, кад год неко дете има бар половину свих новчића, оно сваком другом детету даје онолико колико то дете већ има. Колико се највише потеза може извршити?

18. Свако поље квадратне таблице 50×50 је обојено једном од 10 боја. Доказати да постоје поља таблице M, A, B, C, D исте боје таква да је A директно лево од поља M (не обавезно суседно), B директно десно од M, C директно горе и D директно доле.

19. На одбојкашком турниру играло је $n \geqslant 4$ екипа и сваке две су играле тачно једну утакмицу (нема нерешених). Познато је да не постоје четири екипе A, B, C, D такве да је A победила B, B победила C, C победила D и D победила A. Колико највише може бити тројки екипа (A, B, C) таквих да је A победила B, B победила C и C победила A? (Тројке (A, B, C) и (B, C, A) сматрамо истим.)

20. Дата је квадратна таблица 8×8 чија су сва поља бела. У једном кораку можемо да одаберемо квадрат 2×2 са свим белим пољима и у њему обојимо у црно два дијагонално суседна. Колико највише корака је могуће извршити?

21. Имамо $n \geqslant 2$ сајтова означених са $1, 2, \ldots, n$ и треба да их повежемо линковима. За свако $1 \leqslant i < n$, од сајта i до сајта $i+1$ већ постоји линк. Можемо да додамо нови линк од сајта i до сајта j ако је $i < j$. Доказати да постављањем не више од $3(n-1)\log_2 \log_2 n$ нових линкова можемо постићи да се од сваког сајта i до сваког сајта j са $i < j$ може стићи коришћењем највише три линка.

22. Прост граф G има $2n$ темена и n^2 грана. Пар темена x и y зовемо *блиским* ако имају заједничког суседа. Доказати да у графу G има бар $n(n-1)$ неуређених блиских парова темена.

23. На универзитету има 999 професора. Сваком научном темом се баве тачно три професора, и свака два професора имају тачно по једну заједничку тему. Доказати да се може одабрати 250 тема тако да се сваки професор бави највише једном од њих.

24. Из n-елементног скупа M изабрано је k подскупова тако да, за свака два различита елемента $a, b \in M$, постоје два дисјунктна изабрана подскупа A и B такви да $a \in A$ и $b \in B$. Доказати да је $3^k \geqslant n^3$.

Теорија бројева

25. Одредити све природне бројеве n са својством да за сваки цео број y постоји цео број x за који је $x^3 + x \equiv y \pmod{n}$.

26. Ако природни бројеви x и y задовољавају једнакост $\left[\left(4+2\sqrt{3}\right)x\right] = \left[\left(4-2\sqrt{3}\right)y\right]$, доказати да су они различите парности.

27. Решити једначину $x^2 + x = y^3 + y^2 + y$ у скупу целих бројева.

28. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ природни бројеви. Претпоставимо да су бројеви $k_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ цели за $i = 1, 2, \ldots, n$ (где је $a_0 = a_n$ и $a_{n+1} = a_1$). Доказати да је $2n \leqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leqslant 3n$.

29. На табли је написано $n > 2$ целих бројева са највећим заједничким делиоцем 1. У једном кораку је дозвољено додати (или одузети) једном од записаних бројева целобројни умножак неког од осталих бројева. Одредити најмањи број k такав да је уз помоћ k оваквих операција увек могуће записати број 1.

30. Низ (a_n) је задат условима $a_1 = 1$ и, за све $n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = a_n$ и $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}$. Нека је m природан број. Доказати да се број m појављује у низу $(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$ тачно $\varphi(m)$ пута.

31. Дат је прост број p. На свакој грани комплетног графа са $1000p$ темена написан је цео број. Доказати да постоји прост цикл такав да је збир бројева на његовим гранама дељив са p.

32. Нека је $p > 2$ прост број и a, b, c, d цели бројеви. Ако за сваки природан број n који није дељив са p важи $\{\frac{na}{p}\} + \{\frac{nb}{p}\} + \{\frac{nc}{p}\} + \{\frac{nd}{p}\} = 2$, доказати да је збир нека два од бројева a, b, c, d дељив са p.

Решења

1. Претпоставимо да тврђење није тачно. Нека је P контрапример најмањег степена n (очигледно је $n > 0$) и нека су $t_1 < \cdots < t_m$ сви цели бројеви t за које $P(t) \notin \mathbb{Z}$. Посматрајмо полином $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Јасно је да $Q(t_m) \notin \mathbb{Z}$ и $Q(x) \in \mathbb{Z}$ за $x \in \mathbb{Z}$ кад год x и $x+1$ не припадају скупу $\{t_1, \dots, t_m\}$. Према томе, Q је такође контрапример, али његов степен је $n-1$, што је контрадикција.

2. Означимо $x = \frac{\pi}{2} - y$. Једначина постаје $\sin 9y = 16 \sin y$. Како је $|\sin ny| \leqslant n|\sin y|$ за $y \neq k\pi$, једина решења су $y = k\pi$, тј. $x = \frac{\pi}{2} + l\pi$.

3. За $c > a, b$ је $a \neq bc$ и $b \neq ac$, па тада имамо $f(a^2)f(b)f(c) = f(a^2)f(b^2c^2) = f(a^4b^4c^4) = f(b^2)f(a^2c^2) = f(b^2)f(a)f(c)$, одакле је $f(a^2)/f(a) = f(b^2)/f(b)$; дакле, за неку константу k важи $f(x^2) = kf(x)$ за све x. Полазна једначина постаје $f(a)f(b) = kf(ab)$ за $a \neq b$. Сада имамо $f(a)f(a^2) = f(a^6) = \frac{1}{k}f(a)f(a^5) = \frac{1}{k^2}f(a)f(a)f(a^4) = \frac{1}{k}f(a)f(a)f(a^2)$, одакле следи $f(a) = k$ за све a. Онда је из полазне једначине $k = 1$, контрадикција.

4. За $a = b = 1$ имамо $a_{2i-1} = i$ и $a_{2i} = 1$, па је низ $a_n + a_{n+1} = [\frac{n}{2}] + 2$ неопадајући.

   Нека је сада $a_1 = a \neq 1$ (ако је $a_2 \neq 1$, можемо да заменимо места a_1 и a_2, чиме се остатак низа не мења). Јасно је да је низ (a_n) неограничен: заиста, међу $a_1, \dots, a_{k^2+1}$ има бар $k+1$ једнаких чланова, те је тако неки члан низа не мањи од $k+1$. Претпоставимо да је низ $a_n + a_{n+1}$ неопадајући почев од $n \geqslant N$. Можемо да сматрамо да је $a_{N+1} = t > \max\{a, b\}$, као и да је $a_i < t$ за $i \leqslant N$. Тада је $a_{N+2} = 1$ по дефиницији и $a_N = 1$ због неопадајућости. Следи да у првих N чланова има t јединица, рецимо a_{n_i} за $i = 1, \dots, t$, али онда су по Дирихлеовом принципу два међу $a_{n_i - 1}$ једнака, па иза каснијег од њих не може да дође јединица, што је контрадикција.

5. По А-Г неједнакости је $\sqrt{\frac{a+b}{a+1}} + \sqrt{\frac{b+c}{b+1}} + \sqrt{\frac{c+a}{c+1}} \geqslant 3\sqrt[6]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+1)(b+1)(c+1)}}$, па је довољно доказати да је $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant (a+1)(b+1)(c+1)$. Сменом $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ ова неједнакост постаје $(x^2+yz)(y^2+zx)(z^2+xy) \geqslant xyz(x+y)(y+z)(z+x)$, тј. $3T_{3,3,0} + 3T_{4,1,1} + 2T_{2,2,2} \geqslant 6T_{3,2,1} + 2T_{2,2,2}$, што је тачно по Мјурхедовој неједнакости.

6. По услову задатка, $\frac{1}{a_i+1}$ је једнако $\frac{2}{a_{i+1}+1} - \epsilon_i$, где је $\epsilon_i \in \{0, 1\}$. Индукцијом добијамо $\frac{1}{a_0+1} = \frac{2^n}{a_n+1} - r$ за $r = \epsilon_0 + 2\epsilon_1 + \cdots + 2^{n-1}\epsilon_{n-1}$, тј. $0 \leqslant r < 2^n$. Како је $a_n = 2014$, одавде сређивањем добијамо $(2^n - 2015r)(a_0+1) = 2015$. Притом је $(2^n - 2015r, 2015) = 1$, па мора бити $2^n - 2015r = 1$, тј. $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31 \mid 2^n - 1$, Најмање овакво n је $n = 60$.

   За $n = 60$ тражени низ постоји. Узмимо $r = \frac{2^{60}-1}{2015} = (\overline{\epsilon_{59} \dots \epsilon_1 \epsilon_0})_2$ у бинарном запису; на основу претходног, низ у коме је $a_0 = 2014$, $a_{i+1} = 2a_i + 1$ за $\epsilon_i = 0$ и $a_{i+1} = \frac{a_i}{a_i+2}$ за $\epsilon_i = 1$ задовољава услове.

7. За произвољно $h \in A$ означимо $h^n(x) = h(h(\dots h(x) \dots))$ (n пута примењено h). Међу функцијама h^{2^k} ($k = 0, 1, 2, \dots$) постоје две исте, рецимо $h^{2^m} = h^{2^n}$ ($m < n$). Тада функција $f_0 = h^{2^n - 2^m}$ задовољава једнакост $f_0(f_0(x)) = f_0(x)$ за све x. Ако докажемо да је f_0 "на", следиће да је $f_0(x) = x$ за све x.

   Нека је $g \in A$ функција таква да је $f_0(f_0(x) + y) = 2x + g(g(y) - x)$ за све x, y. Функција g је "на" јер за $y = -f(x)$ имамо $g(g(-f_0(x)) - x) = f_0(0) - 2x$. С друге стране, за $x = 0$ добијамо да $f_0(f_0(0) + y) = g(g(y))$ узима све реалне вредности, па је и f_0 "на".

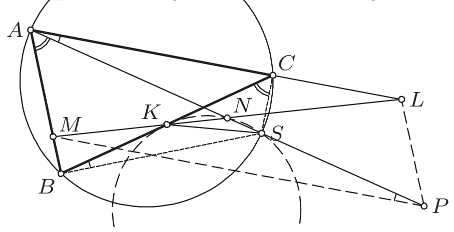
8. Како је $(x+1)(y+1)(z+1) = \frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc} = -(x-1)(y-1)(z-1)$, бројеви x, y, z су везани релацијом $g(x,y,z) = \frac{(x+1)(y+1)(z+1)+(x-1)(y-1)(z-1)}{2} = xyz + x + y + z = 0$. Можемо да сматрамо да је $-xyz = x + y + z > 0$ (у супротном је неједнакост тривијална), тако да је међу x, y, z тачно један (рецимо z) негативан. Тада је $b > c > a > 0$, па је $0 < y < 1$. Доказаћемо методом Лагранжових множилаца да под овим условима важи $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{2}(x+y+z) \geqslant 0$.

   За $x \geqslant 9$ или $z \leqslant -9$ свакако важи $x^2+y^2+z^2 \geqslant 3(|x|+|y|+|z|) \geqslant 3(x+y+z)$. За $y = 1$ имамо $z = -1$ и $f = x^2+2-2\sqrt{2} \geqslant 0$, а једнакост се достиже за $x = \sqrt{2}$. Остаје да испитамо област $D(0 < x < 9,\ 0 < y < 1,\ -9 < z < 0)$. У њој се евентуални минимум функције $f(x,y,z)$ при услову $g = 0$ достиже у стационарној тачки функције $h(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$. Имамо $h'_x = 2x - 2\sqrt{2} + \lambda(yz+1)$, $h'_y = 2y - 2\sqrt{2} + \lambda(xz+1)$ и $h'_z = 2z - 2\sqrt{2} + \lambda(xy+1)$. Из прве две једначине следи $x = y$, из $g = 0$ следи $z = -\frac{2x}{1+x^2}$, па се неједнакост $f \geqslant 0$ своди на $(1+x^2)^2+2 \geqslant 2x(1+x^2)\sqrt{2}$, што је тачно јер је $u^2+2 \geqslant 2u\sqrt{2} > 2xu\sqrt{2}$ за $u=1+x^2$. Према томе, $f(x,y,z) \geqslant 0$ при услову $g=0$ важи и унутар D.

9. Означимо са P,Q,R,S,T редом средишта дужи BC, AC, AB, BE, CD. Тачке S и T редом леже на дужима PR и PQ и важи $\triangle BSP \sim \triangle BEC \sim \triangle ABC$ и слично $\triangle CPT \sim \triangle ABC$. Одавде је $\frac{PS}{BP}=\frac{BC}{AC}$ и $\frac{PT}{CP}=\frac{BC}{AB}$. Дељењем добијамо $\frac{PS}{PT}=\frac{AB}{AC}=\frac{PQ}{PR}$, тј. $PS \cdot PR = PT \cdot PQ$, одакле следи тврђење.

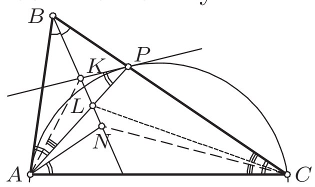
10. Тачке K и N су редом симетричне тачки B_1 у односу на CB и CH. Зато је $CK=CN$, $\sphericalangle KCN = \sphericalangle KCA - \sphericalangle NCA = 2\sphericalangle BCA - 2\sphericalangle HCA = 2\sphericalangle HCB$ и $\sphericalangle CKN = 90^\circ - \sphericalangle HCB = \sphericalangle CBA = \sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle CKA_1$, и отуда колинеарност тачака K, N, A_1.

11. Због $\sphericalangle KCL > \sphericalangle KBM$ важи $KL > KM$, па тачка N припада дужи KL. Нека је P тачка таква да је четвороугао $ALPM$ паралелограм. Како је $\sphericalangle SBC = \sphericalangle SAC = \sphericalangle MPA$ и $\sphericalangle SCB = \sphericalangle SAB = \sphericalangle MAP$, троуглови SBC и MPA су слични. У тој сличности тачке K и N одговарају једна другој, па важи $\sphericalangle SKC = \sphericalangle MNA = \sphericalangle KNA$, одакле следи да права KC додирује круг KNS.



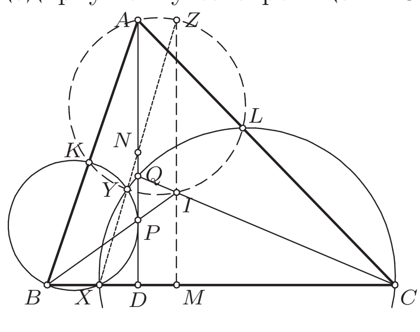
12. Нека је ABC дати троугао и BC његова "доња" страница, за коју сматрамо да је хоризонтална. За сваки троугао T_i у подели, одговарајући коефицијент хомотетије је $\epsilon_i a_i/BC$, где је a_i хоризонтална страница троугла T_i, а ϵ_i знак хомотетије. Збир свих коефицијената хомотетије је $\frac{1}{BC}\sum_i \epsilon_i a_i$. У овој суми свака дуж паралелна дужи BC, осим оних на дужи BC, рачуна се двапут - једном са знаком + (у троуглу изнад ње) и једном са знаком $-$ (у троуглу испод). Тако се у наведеној суми све дужи осим оних на BC скрате, па је сума једнака BC, а збир коефицијената је 1.

13. Троуглови BPA и BAC су слични; нека при тој сличности тачка K у $\triangle BPA$ одговара тачки N у $\triangle BAC$. Тада је N на симетрали угла B и $\sphericalangle NAC = \sphericalangle KPA = \sphericalangle PCA = \sphericalangle PAB = \sphericalangle LAB$. Следи да су тачке N и L изогонално спрегнуте у троуглу ABC, тако да је $\sphericalangle LAK = \sphericalangle NCA = \sphericalangle LCB$.



14. Означимо са I центар уписаног круга, M његову додирну тачку са страницом BC, а X тачку симетричну тачки M у односу на D. Троуглови BKP и BMP су подударни, па је $\sphericalangle BKP = \sphericalangle PNB = 180^\circ - \sphericalangle PXB$ (у оријентисаним угловима), што значи да тачка X лежи на кругу BKP. Слично, X лежи на кругу CLQ.

Нека је Y друга тачка пресека кругова BKP и CLQ. По Микеловој теореми, она лежи и на кругу AKL са пречником AI. Нека круг AKL поново сече праву XY у тачки Z. Пошто је $\sphericalangle ZAK = \sphericalangle KYX = 180 - \sphericalangle B$, важи $AZ \parallel BC$. Такође је $\sphericalangle AZI = 90^\circ$, па је $ZI \perp BC$. Следи да су тачке Z, I, M колинеарне, тј. $AZMD$ је правоугаоник. Како је $XD = DM$, следи да је $AZDX$ паралелограм, па права XYZ сече висину AD у њеном средишту N. Дакле, N је на радикалној оси кругова BKP и CLQ.

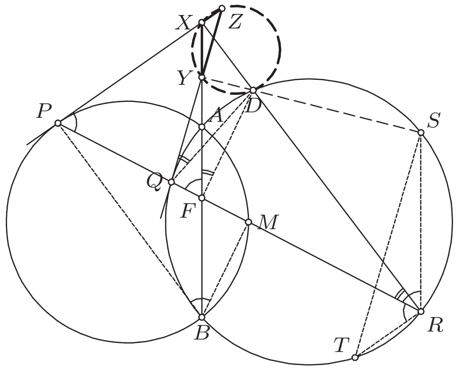


15. Нека је O центар круга k, P, Q, R редом додирне тачке k_1 са AB, k, CD, а K, L, M редом додирне тачке k_2 са AB, k, CD. Доказаћемо да концикличност A, B, I, J повлачи $IJ \parallel AB$.

Претпоставимо да се праве IJ и AB секу у тачки T. Како је $TI \cdot TJ = TA \cdot TB = TL \cdot TQ$, тачке I, J, L, Q су концикличне, па из $OL = OQ$ следи $OI = OJ$, тј. $IJ \parallel KL$, што је немогуће. Дакле, $IJ \parallel AB$, па су кругови k_1 и k_2 подударни и $AK = BP$.

Кејсијева теорема за тачке A, B, C и круг k_1 даје $AB \cdot CR + AC \cdot BP = BC \cdot AP$, па како је $CR = CD - BD + BP$ и $AP = AB - BP$, из претходне једнакости добијамо $BP = \frac{AB(BC+BD-CD)}{AB+BC+CA}$. Слично имамо $AK = \frac{AB(AC+AD-CD)}{AB+BC+CA}$, па изједначавањем добијамо $BC + BD = AC + AD$, тј. D је додирна тачка приписаног круга.

16. Означимо $X = AB \cap \ell_P$, $Y = AB \cap \ell_Q$, $Z = \ell_P \cap \ell_Q$, уз распоред $B - A - X$. Даље, нека



права MP сече AB и Ω редом у тачкама F и R, и нека су S и T тачке на Ω такве да је $RS \parallel XY$ и $RT \parallel XZ$.

Како је $\sphericalangle PRT = \sphericalangle MPX = \sphericalangle MBP = \sphericalangle AFP = \sphericalangle SRP$, тачка Q је средиште лука TQS, па је $\ell_Q \parallel TS$. Следи да су троуглови XYZ и RST хомотетични са хомотетијом $\mathcal{H}$. Показаћемо да је тачка $D = RX \cap \Omega$ $(D \neq R)$ центар хомотетије $\mathcal{H}$; одавде ће следити да се кругови XYZ и Ω додирују у тачки D. Довољно је доказати да је D на правој SY. Због $\sphericalangle PFX = \sphericalangle XPF$ важи $XF^2 = XP^2 = XA \cdot XB = XD \cdot XR$, па је $\frac{XF}{XD} = \frac{XR}{XF}$, тј. $\triangle XDF \sim \triangle XFR$. Одавде је $\sphericalangle DFX = \sphericalangle XRF = \sphericalangle DRQ = \sphericalangle DQY$, што значи да су тачке D, Y, Q, F концикличне. Сада имамо $\sphericalangle YDQ = \sphericalangle YFQ = \sphericalangle SRQ = 180^\circ - \sphericalangle QDS$, дакле $D \in SY$.

17. Приметимо да после првог потеза свако дете има паран број новчића. Индукцијом следи да после k потеза свако дете има број новчића дељив са 2^k. Према томе, највише n потеза се може извршити. Број n се може достићи ако имамо три детета, од којих два имају по један новчић а један све остале.

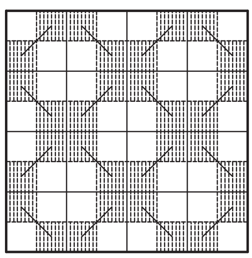
18. Бар $50^2/10 = 250$ поља има исту боју, рецимо црну. Међу црним пољима има највише 50 крајње левих (тј. нема црних поља директно лево од њих), највише 50 крајње десних, највише 50 крајње доњих и највише 50 крајње горњих. Остаје 50 црних поља која нису крајње лева, десна, горња или доња, и било које од њих можемо узети за поље M.

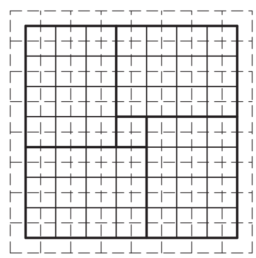
19. Ако је екипа A победила B, пишемо $A \to B$. Приметимо да никоје две тражене тројке немају заједничку екипу. Заиста, ако је $A \to B \to C \to A$, $A \to D \to E \to A$ и нпр. $B \to D$, онда имамо недозвољену четворку $A \to B \to D \to E \to A$. Следи да тражених тројки има највише $[\frac{n}{3}]$. Остаје да докажемо да се тај број може достићи.

Нека су екипе $A_1, A_2, \dots, A_n$. Посматрајмо турнир у коме је $A_{3k-2} \leftarrow A_{3k}$ за $k = 1, \dots, [\frac{n}{3}]$ и $A_i \to A_j$ за $i < j$ у свим осталим случајевима. У њему има тачно $[\frac{n}{3}]$ тражених тројки. С друге стране, ако постоји четворка $A_i \to A_j \to A_k \to A_l \to A_i$ са $i = \max\{i, j, k, l\}$, онда за неко r важи $i = 3r - 2$, $l = 3r$ и $i < j$, $k < l$, дакле $k \leqslant 3r - 1 \leqslant j$, што је немогуће јер $A_k \leftarrow A_j$ и $j \neq 3r$.

20. Ако извршимо 16 корака као на слици, остаје нам 5 празних квадрата 2×2. Према томе, могуће је извршити 21 корак. Показаћемо да не може више.

Центри свих поља табле образују квадратну таблу T димензија 7×7. Сваки корак на квадрату 2×2 можемо да посматрамо као корак на једном пољу табле T, и то у једном од два могућа правца: нагоре-лево или нагоре-десно. Приметимо:





(1) Није могуће извршити кораке у два суседна поља табле T. Заиста, први од та два корака би обојио један од јединичних квадрата који одговарају суседном пољу табле T.

(2) Није могуће извршити кораке у четири поља суседна истом пољу A табле T. Заиста, ако је без смањења општости први корак на доњем суседу поља A у правцу нагоре-десно, онда неће моћи да се изврши корак на десном суседу поља A.

Поделимо таблу T на четири правоугаоника 3×4 и један јединични квадрат. Из (1) и (2) следи да се ни у једном правоугаонику 3×4 не може извршити више од 5 корака. То укупно даје највише $4 \cdot 5 + 1 = 21$ корака.

21. Означимо са $T(n)$ најмањи потребан број нових линкова. Доказујемо индукцијом да је $T(n) \leqslant 3(n-1)\log_2 \log_2 n$. То важи за $n \leqslant 3$ јер је $T(2) = T(3) = 0$.

Нека је $n \geqslant 4$ и $k \in \mathbb{N}$ такво да је $k^2 \leqslant n < (n+1)^2$. Пошто је T растућа функција, важи $T(n) \leqslant T((k+1)^2 - 1)$. Поделимо странице $1, 2, \dots, (k+1)^2 - 1$ на групе $G_1, \dots, G_{k+1}$, где је $G_i = \{x \mid (i-1)(k+1) < x \leqslant i(k+1), x < (k+1)^2\}$; у свакој има по $k+1$ сајтова, осим последње у којој их има k.

За $1 \leqslant r, i \leqslant k$ додајмо линкове $r(k+1)-i \to r(k+1)$ и $r(k+1) \to r(k+1)+i$, као и све линкове између сајта са редним бројевима дељивим са $k+1$. Потом у сваку групу додајмо најмањи потребан број линкова $T(k)$. Овако смо додавањем $\frac{5}{2}k(k-1)+(k+1)T(k)$ нових линкова постигли оно што је тражено. Ако сада докажемо да је $\frac{5}{2}k(k-1)+(k+1)T(k) \leqslant 3(k^2-1)\log_2\log_2 k^2$, одмах ће следити $T(n) \leqslant 3(n-1)\log_2\log_2 n$. Коришћењем индуктивне хипотезе за $T(k)$ потребна неједнакост се своди на $k^2+5k-6 \geqslant 0$, што је тачно.

22. Са $d(x)$ означавамо степен темена x. Нека је $f(x)$ највећи степен међу суседима темена x. Број $n(x)$ блиских парова који садрже теме x није мањи од $f(x)-1$. Тако за укупан број N блиских парова важи $N \geqslant \frac{1}{2}\sum_{x\in G} f(x) - n$.

    За сваку грану $e = xy$ дефинишимо $g(e) = \frac{d(x)}{d(y)} + \frac{d(y)}{d(x)}$. Из $g(e) \geqslant 2$ следи $\sum_{e\in G} g(e) \geqslant 2|E| = 2n^2$. С друге стране, за свако x важи $\sum_{xy\in G} \frac{d(y)}{d(x)} \leqslant f(x)$, па је $\sum_{e\in G} g(e) \leqslant \sum_{x\in G} f(x)$. Према томе, $\sum_{x\in G} f(x) \geqslant 2n^2$ и одатле $N \geqslant n^2 - n$.

23. Професорима одговарају елементи 999-чланог скупа, а темама трочлани подскупови овог скупа. Сваки пар елемената је садржан у тачно једној тројци, а треба одабрати 250 дисјунктних тројки.

    Нека је $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$ највећа могућа фамилија дисјунктних тројки; претпоставимо да је $k \leqslant 249$. Укупно $s = 999 - 3k \geqslant 252$ елемената не припада ниједној тројки T_i; нека је S скуп тих елемената. За свака два елемента $a, b \in S$ постоји тачно једна тројка $T_{a,b}$ која садржи оба. Трећи члан тројке $T_{a,b}$ није у S, јер бисмо у супротном фамилију $\mathcal{T}$ могли да проширимо тројком $T_{a,b}$. Дакле, тај трећи члан је у некој тројци T_i - придружимо пару (a,b) тројку T_i и трећег члана.

    Парова елемената из S има $\frac{s(s-1)}{2}$, па је једна од тема $T_i = \{x,y,z\}$ придружена бар $\frac{s(s-1)}{2k} > \frac{s}{2}$ пута, и то паровима (a_i,b_i), $i = 1,\dots,d$ ($d > \frac{s}{2}$). Међу тим паровима има више од $\frac{s}{6} > 2$ парова, рецимо $(a_i,b_i)_{i=1}^p$, којима одговара исти члан тројке T_i, рецимо x. Парови (a_i,b_i), $i = 1,\dots,p$ су дисјунктни: заиста, ако нека два пара имају исти елемент a, онда постоје две тројке које садрже a и x. Следи да је $p \leqslant \frac{s}{2} < d$. Нека пару (a_{p+1}, b_{p+1}) одговара елемент y. Овај пар је дисјунктан са једним од првих p парова, рецимо са (a_1,b_1). Према томе, из фамилије $\mathcal{T}$ можемо да избацимо тројку T_i, а убацимо $\{a_1,b_1,x\}$ и $\{a_{p+1},b_{p+1},y\}$, чиме увећавамо $\mathcal{T}$ - контрадикција.

24. За скупове A и B из услова задатка казаћемо да *раздвајају* a и b.

    Тврђење доказујемо индукцијом по n. База $n=1$ је тривијална. За $n \geqslant 2$ посматрајмо граф чија су темена наших k подскупова, а гране повезују дисјунктне подскупове. Изолована темена можемо да бришемо јер не служе ничему. Имамо следеће случајеве.

    (1) У графу постоји теме A које је спојено само с теменом B. Раздвајању елемената било ког од скупова B и $M \setminus B$ не служе скупови A и B. Бар један од скупова $B, M\setminus B$ има бар $\frac{n}{2}$ елемената, па важи $3^{k-2} \geqslant (\frac{n}{2})^3$ и одатле $3^k > n^3$.

    (2) У графу постоји теме A степена бар 3. Као и у случају (1), добијамо $3^{k-1} \geqslant |M\setminus A|^3$ и $3^{k-4} \geqslant |A|^3$, па је $n^3 \leqslant (3^{\frac{k-1}{3}} + 3^{\frac{k-4}{3}})^3 = 4^3 \cdot 3^{k-4} < 3^k$.

    (3) Сва темена имају степен 2. Нека је A подскуп највеће кардиналности, а B и C скупови који не секу A. Раздвајању елемената било ког од скупова A и $M \setminus (B\cup C)$ не служе скупови A, B, C. Како важи бар једна од неједнакости $|A| \geqslant \frac{n}{3}$ и $M\setminus(B\cup C) \geqslant \frac{n}{3}$, следи $3^{k-3} \geqslant (\frac{n}{3})^3$, тј. $3^k \geqslant n^3$.

25. По услову задатка, $\{x^3 + x \mid x = 0,1,\dots,n-1\}$ је потпун систем остатака по модулу n. Приметимо да, ако n нема то својство, онда га нема ни било који природни умножак броја n.

    Број $n=2$ нема тражено својство, а $n=3$ га има. Претпоставимо да прост број $n>3$ има то својство. Како је $x^3+x \not\equiv y^3+y$ за све целе x,y ($x \not\equiv y \pmod n$), количник $f(x,y) = \frac{y^3+y-x^3-x}{y-x} = x^2+xy+y^2+1$ није дељив са n за $x \not\equiv y \pmod n$. Шта више, $n \mid f(x,y)$ је немогуће и за $x \equiv y \pmod n$ јер онда такође $n \mid f(x,-2x)$. Дакле, $f(x,y) \not\equiv 0$ за све целе x,y.

    Како је $4f(x,y) = z^2+3y^2+4$ за $z = 2x+y$, број z^2+3y^2+4 није дељив са n ни за које $y, z \in \mathbb{Z}$. Посматрајмо сада скупове $Y = \{3y^2+4 \mid y\in\mathbb{Z}\}$ и $Z = \{-z^2 \mid z \in \mathbb{Z}\}$. Сваки од скупова Y и Z има бар $\frac{n+1}{2}$ елемената по модулу n, па они имају заједнички елемент, тј. $3y^2+4 \equiv -z^2 \pmod n$, а тада $n \mid z^2+3y^2+4$, што је контрадикција. Према томе, једини прост број са траженим својством је $n=3$.

Следи да, ако n задовољава услов задатка, онда је $n = 3^k$ за неко $k \in \mathbb{N}_0$. Овакви бројеви имају тражено својство. Заиста, лако се проверава да $3 \nmid f(x, y)$ за $x, y \in \mathbb{Z}$, па тако из $x^3 + x \equiv y^3 + y \pmod{3^k}$ следи $x \equiv y \pmod{3^k}$.

26. Ако означимо $\left[\left(4+2\sqrt{3}\right)x\right] = n$, из дате једнакости имамо $n < \left(4+2\sqrt{3}\right)x < n+1$, што је еквивалентно са $\frac{2-\sqrt{3}}{2}n < x < \frac{2-\sqrt{3}}{2}(n+1)$. Слично је $\frac{2+\sqrt{3}}{2}n < y < \frac{2+\sqrt{3}}{2}(n+1)$. Сабирањем добијамо $2n < x+y < 2(n+1)$, па мора бити $x+y = 2n+1$.

27. Дату једначину можемо да запишемо као $(x^2+x)-(y^2+y) = (x-y)(x+y+1) = y^3$. Приметимо да су бројеви $x-y$ и $x+y+1$ зајамно прости: заиста, ако $d \mid x-y$ и $d \mid x+y+1$, по претходном $d \mid y$, па $d \mid x$ и одатле $d \mid 1$. Следи да су $x-y$ и $x+y+1$ потпуни кубови: $x-y = u^3$ и $x+y+1 = v^3$. Сада је $y = uv$, одакле добијамо $v^3 - u^3 = 2uv+1$.

    Јасно је да је $u \neq v$, па је $u^2+uv+v^2 \geqslant |uv|+1$ и одатле $|v^3-u^3| = |v-u| \cdot |u^2+uv+v^2| > \frac{1}{2}|v-u| \cdot |2uv+1|$; према томе, $|v-u| < 2$, тј. $v-u = \pm 1$. Одавде једноставно налазимо да су једина решења $(u, v) = (-1, 0)$ или $(0, 1)$, тј. $(x, y) = (-1.0)$ или $(0, 0)$.

28. Лева неједнакост је лака: $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) + \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2}\right) + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_1}{a_n}\right) \geqslant 2n$.

    Десну неједнакост доказујемо индукцијом. За $n = 1$ је тривијално ($k_1 = 2$). Нека је $n > 1$ и нека је $a_n = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Тада мора бити $k_n = 1$ и $a_n = a_{n-1} + a_1$. Следи да су $\frac{a_{n-2}+a_1}{a_{n-1}} = k_{n-1} - 1$ и $\frac{a_{n-1}+a_2}{a_1} = k_1 - 1$ цели бројеви, па применом индуктивне претпоставке на $n-1$ бројева $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ добијамо $(k_1 - 1) + k_2 + \cdots + k_{n-2} + (k_{n-1} - 1) < 3(n-1)$, одакле одмах следи $k_1 + \cdots + k_n < 3n$.

29. *Лема.* Ако су a, b, m цели бројеви различити од нуле и $(a, b) = 1$, онда постоји $k \in \mathbb{Z}$ такво да је $(a+kb, m) = 1$.

    Доказ. Нека је m' производ простих делилаца броја m који не деле b. Пошто је $(m', b) = 1$, постоје цели x, y такви да је $xb + ym' = 1$. Тада за $k = x(1-a)$ имамо $a + kb = a + xb(1-a) = 1 + ym'(a-1)$, што је узајамно просто са m', а самим тим и са m. □

    Докажимо да је n операција увек довољно. Ако је $(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 1$, онда за неке целе x_i имамо $x_1 a_1 + \cdots + x_{n-1} a_{n-1} = 1 - a_n$, па додавањем броју a_n редом умножака $x_i a_i$ добијамо јединицу у $n-1$ корака. Посматрајмо сада општи случај; нека је $d = (a_{n-1}, a_n)$ и $e = (a_1, \ldots, a_{n-2})$. Јасно је да је $(d, e) = \left(\frac{a_{n-1}}{d}, \frac{a_n}{d}\right) = 1$, па на основу леме постоји цело k такво да је $\frac{a_{n-1}+ka_n}{d}$ узајамно просто са e. Тада је такође $(a_1, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1} + ka_n) = 1$, па као малопре у додатних $n-1$ корака постижемо да на месту броја a_n буде јединица.

    С друге стране, $n-1$ корака није увек довољно. Нека су $p_1, \ldots, p_n > 2$ различити прости бројеви. По Кинеској теореми о остацима постоје цели бројеви $a_1, \ldots, a_n$ такви да је $a_i \equiv 0 \pmod{p_j}$ за $j \neq i$ и $a_i \equiv 2 \pmod{p_i}$. Претпоставимо да је на њих примењено $n-1$ корака. Тада (за неко i) ниједном броју нисмо додали умножак броја a_i, што значи да се ови бројеви нису мењали по модулу p_i. Како ниједан број није конгруентан са 1 $\pmod{p_i}$, нисмо могли да добијемо јединицу.

30. Подсетимо се дефиниције Фарејевог низа:

    - *Фарејев низ* реда $m \in \mathbb{Z}$ је растући низ свих рационалних бројева у интервалу $[0, 1]$ чији имениоци нису већи од m.

    Почевши од низа $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$, Фарејев низ реда m се може конструисати на следећи начин: док год постоје два узастопна члана низа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ таква да је $b + d \leqslant m$, између њих убацујемо њихову *медијанту* $\frac{a+c}{b+d}$. Тако су Фарејеви низови реда 2 и 3 редом $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$ и $\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right)$.

    Означимо $S = \{\frac{k}{2^n} \mid k, n \in \mathbb{N}_0, k \leqslant 2^n\}$ и уведимо пресликавање $f : \mathbb{Q} \cap [0, 1] \to S$ условима $f\left(\frac{0}{1}\right) = 0$, $f\left(\frac{1}{1}\right) = 1$ и $f\left(\frac{a+c}{b+d}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{a}{b}\right) + f\left(\frac{c}{d}\right)\right)$ кад год су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ суседни чланови Фарејевог низа неког реда ($(a, b) = (c, d) = 1$). Јасно је да је ово пресликавање бијективно.

    Лако се показује индукцијом по n да, ако је $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{k}{2^r}$ за $k, r \in \mathbb{N}_0$ ($0 \leqslant p \leqslant q$, $(p, q) = 1$), онда је $a_{2^r+k} = q$. Заиста, ако је $k = 2l$ ($l \in \mathbb{N}_0$), онда из $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{l}{2^{r-1}}$ по индуктивној претпоставци следи $a_{2^r+k} = a_{2^{r-1}+l} = q$. С друге стране, ако је $k = 2l+1$, нека су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ такви да је $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{l}{2^{r-1}}$ и $f\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{l+1}{2^{r-1}}$; тада је $f\left(\frac{a+c}{b+d}\right) = \frac{k}{2^r}$ по дефиницији, те је $a + c = p$ и $b + d = q$, а онда је по индуктивној претпоставци $a_{2^r+k} = a_{2^{r-1}+l} + a_{2^{r-1}+l+1} = b + d = q$.

    Према томе, $a_m = n$ за непарно m ако и само ако је $m = 2^r + k$, при чему је $f\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{k}{2^r}$. Како нескративих разломака $\frac{p}{n}$ има тачно $\varphi(n)$, тврђење следи.

    Напомена. Пресликавање f је познато и као *функција Минковског*, са ознаком $?(x)$.

31. Треба нам следећа класична лема из комбинаторне теорије бројева.

Лема. Нека је p прост број и $a_1, a_2, \dots, a_k$ $(k < p)$ цели бројеви који нису дељиви са p. Тада се међу збировима $\sum_{i \in A} a_i$, где је $A \subset \{1, 2, \dots, k\}$, појављује бар $k+1$ различитих по модулу p. Специјално, за $k = p-1$ збирови $\sum_{i \in A} a_i$ дају све могуће остатке $\pmod p$.

Доказ. Индукција по k. За $k = 1$ је тривијално; претпоставимо да важи за $k-1$, али не за k. Тада постоје подскупови $A_1, \dots, A_k \subset \{1, \dots, k-1\}$ такви да су збирови $s_j = \sum_{i \in A_j} a_i$ различити по модулу p. Збирови $s_j + a_k$ су такође различити по модулу p, али они не чине пермутацију збирова s_j јер је $\sum_j (s_j + a_k) \not\equiv \sum_j s_j \pmod p$. Зато међу њима постоји бар један нови збир по модулу p. $\square$

Са $[uv]$ означавамо број на грани uv. Почнимо од произвољне три произвољна темена u_1, v_1, u_2; нумеришимо их тако да је $[u_1v_1] + [v_1u_2] \not\equiv [u_1u_2] \pmod p$. Затим одаберимо нова темена v_2, u_3 тако да је $[u_2v_2] + [v_2u_3] \not\equiv [u_2u_3] \pmod p$, итд, до темена v_{p-1} и u_p. Означимо са s збир по ивицама цикла $C = u_1u_2 \dots u_pu_1$ и нека је $a_i = [u_iv_i] + [v_iu_{i+1}] - [u_iu_{i+1}]$. По леми се може одабрати неколико бројева a_i, рецимо $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$, тако да је њихов збир конгруентан са $-s$ по модулу p. Тада уметањем темена v_i између u_i и u_{i+1} у циклу C добијамо цикл чији је збир бројева на ивицама дељив са p.

32. За сваки p-ти примитивни корен јединице ω важи

$$\omega + \omega^2 + \dots + \omega^{p-1} = -1 \quad \text{и} \quad \omega + 2\omega^2 + \dots + (p-1)\omega^{p-1} = \frac{p}{\omega - 1}\,. \qquad (*)$$

Јасно је да a, b, c, d нису дељиви са p; означимо њихове инверзе по модулу p редом са a', b', c', d'. Са $\langle x \rangle$ означаваћемо остатак целог броја x при дељењу са p. Услов задатка је еквивалентан са $\langle na \rangle + \langle nb \rangle + \langle nc \rangle + \langle nd \rangle = 2p$; њега можемо записати и као

$$\langle na \rangle \omega^{ma'\langle na \rangle} + \langle nb \rangle \omega^{mb'\langle nb \rangle} + \langle nc \rangle \omega^{mc'\langle nc \rangle} + \langle nd \rangle \omega^{md'\langle nd \rangle} = 2p\omega^{mn} \qquad (1)$$

за произвољне целе $1 \leqslant m, n < p$.

Када n пролази скуп $\{1, 2, \dots, p-1\}$, сваки од бројева $\langle na \rangle, \langle nb \rangle, \langle nc \rangle, \langle nd \rangle, \langle mn \rangle$ узима све вредности $1, 2, \dots, p-1$. Тако сумирањем (1) за $n = 1, \dots, p-1$ користећи $(*)$ добијамо

$$\frac{1}{\omega^{ma'} - 1} + \frac{1}{\omega^{mb'} - 1} + \frac{1}{\omega^{mc'} - 1} + \frac{1}{\omega^{md'} - 1} = -2. \qquad (2)$$

Свођењем на заједнички именилац и сређивањем добијамо $2 + \omega^{m(a'+b'+c')} + \omega^{m(a'+b'+d')} + \omega^{m(a'+c'+d')} + \omega^{m(b'+c'+d')} = 2\omega^{m(a'+b'+c'+d')} + \omega^{ma'} + \omega^{mb'} + \omega^{mc'} + \omega^{md'}$ за $m = 1, \dots, p-1$, што важи и за $m = 0$. Сумирањем по свим $m \pmod p$ лева страна је бар $2p$ (сваки сабирак после првог је 0 или p), а десна је једнака $2p$ ако $p \mid a' + b' + c' + d'$ и 0 иначе. Следи да $p \mid a' + b' + c' + d'$, па претходна релација постаје

$$\omega^{ma'} + \omega^{mb'} + \omega^{mc'} + \omega^{md'} = \omega^{-ma'} + \omega^{-mb'} + \omega^{-mc'} + \omega^{-md'}. \qquad (3)$$

Ако $a' + b'$, $a' + c'$ и $a' + d'$ нису дељиви са p, множењем (3) са $\omega^{-ma'}$ и сумирањем по $m = 0, 1, \dots, p-1$ добијамо контрадикцију: $p = 0$. Према томе, нпр. $p \mid a' + b'$ и одатле $p \mid a + b$.