Задаци за самосталан рад

(припремио Душан Ђукић)

Покушао сам, вероватно неуспешно, да унутар сваке области сортирам задатке од лакших ка тежим. Радите их сами и пробајте сваки. Дајем вам 10 дана за рад. Лепо се забавите.

Алгебра

1. Низ позитивних реалних бројева $x_1, x_2, \ldots$ задовољава услов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$. Доказати неједнакост $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n^2} \leqslant 2$.

2. Одредити све реалне полиноме $P(x)$ такве да важи $(x+1)^3P(x-1) - (x-1)^3P(x+1) = 4(x^2-1)P(x)$ за све x.

3. Постоје ли две функције $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да важи $f(x + f(y)) = \{y\} + g(x)$ за све $x, y \in \mathbb{R}$?

4. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ позитивни бројеви. Доказати да бар један од бројева x_1, $\frac{1}{x_1} + x_2$, $\frac{1}{x_2} + x_3$, $\ldots$, $\frac{1}{x_{n-1}} + x_n$, $\frac{1}{x_n}$ није већи од $2\cos\frac{\pi}{n+2}$.

5. Наћи све функције $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такве да важи $2f(x) \leqslant f(y) \leqslant 3f(x)$ кад год су $x, y > 0$ и $2x \leqslant y \leqslant 3x$.

6. Нека су $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$ реални бројеви и X њихова аритметичка средина. Доказати да је $\sum_{i=1}^{2n-1}(x_i - x_n)^2 \leqslant 2\sum_{i=1}^{2n-1}(x_i - X)^2$.

7. Нека је n природан број. Полином $P(x, y)$ степена не већег од $n-1$ задовољава $P(x, y) = \frac{x}{y}$ за све природне бројеве x, y за које је $x + y \leqslant n + 1$. Колико је $P(0, 0)$?

8. Низ природних бројева $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ задовољава услов $a_{a_n} \leqslant a_n + a_{n+3}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји бесконачно много тројки индекса $k < l < m$ таквих да је $a_k + a_m = 2a_l$.

Геометрија

9. На кругу су изабране четири тачке и за сваку од њих је израчунат производ растојања до преостале три тачке. Могу ли ови бројеви бити једнаки 1, 2, 3 и 4?

10. У троуглу ABC са страницама $a < b < c$, тачке D, E и F су редом средишта страница BC, CA и AB. Права ℓ сече праве BC, CA и AB редом у тачкама P, Q и R. Доказати да је $DP + EQ + FR \geqslant \sqrt{ab}$.

11. Уписани круг троугла ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама D и E. Нека је J центар приписаног круга троугла ABC наспрам темена A. Тачке M и N су редом средишта дужи JD и JE. Доказати да се праве BM и CN секу на описаном кругу троугла ABC.

12. У конвексном четвороуглу $ABCD$, симетрале углова A и D се секу у тачки K, а симетрале углова B и C секу се у тачки L. Доказати да је $KL \geqslant \frac{1}{2}|AB - BC + CD - DA|$.

13. Нека је O центар описаног круга оштроуглог троугла ABC, а CD његов пречник. На полуправим DA и DB дате су редом тачке K и L такве да је $\sphericalangle DKO = \sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle DLO = \sphericalangle ABC$. Доказати да права KL полови страницу AB.

14. У конвексном четвороуглу $ABCD$ важи $AB = BC = CD$. Дијагонале AC и BD се секу у тачки E. Тачке X и Y су такве да су $BECX$ и $AEDY$ паралелограми, а Z је тачка таква да је $AZ = CZ$ и $BZ = DZ$. Доказати да су тачке X, Y и Z колинеарне.

15. На симетрали угла BAC троугла ABC дате су тачка P унутар $\triangle ABC$ и тачка Q ван њега (али унутар $\sphericalangle BAC$) тако да је $\sphericalangle BPC = 90^\circ + \sphericalangle A$ и $\sphericalangle BQC = 90^\circ$. Тачка R је дијаметрално супротна тачки P на кругу BPC. Доказати да права QR пролази кроз средиште лука BAC описаног круга $\triangle ABC$.

16. Дат је неједнакокраки троугао ABC. На страници CA дате су тачке K и N, а на страници CB тачке L и M, тако да важи $CK = CL = BM = AN$. Дужи KL и MN секу се у тачки P. Тачка Q је средиште лука ACB описаног круга троугла ABC, а R је средиште странице AB. Доказати да је $\sphericalangle RPN = \sphericalangle QPK$.

Комбинаторика

17. На табли је записан израз $x^{2016} + (*)x^{2015} + \cdots + (*)x + (*)$. Мишко и Балтић наизменично замењују по једну звездицу реалним бројевима, при чему Мишко игра први. Када су све звездице замењене, Мишко побеђује ако добијени полином није дељив са $x^2 + 1$, а Балтић ако јесте. Ко има победничку стратегију?

18. Сто стручњака је образовало 450 комисија. Сваке две комисије имају највише три заједничка члана, а сваких пет имају највише једног заједничког члана. Доказати да постоје четири комисије које имају тачно једног заједничког члана.

19. Дат нам је по један тег сваке од маса $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$ За $n \in \mathbb{N}$, нека је A_n број начина на које се може одабрати неколико тегова са укупном масом n. Доказати да је $A_n \leqslant A_{n+1}$ за $n \geqslant 2$.

20. Сви углови (неконвексног) 1000-угла су прави, а дужине свих његових страница су непарни природни бројеви. Доказати да је његова површина паран природан број.

21. Квадрат странице 100 је помоћу 99 хоризонталних и 99 вертикалних правих подељен на 10000 правоугаоника. Колико најмање међу овим правоугаоницима може да има површину не већу од 1?

22. На такмичењу је N ученика радило задатке из четири области, и свака два ученика у свакој области имају различите поене. Групу ученика зовемо *конзистентном* ако се може истовремено сортирати у растући поредак по поенима из две области. Наћи најмање N које гарантује постојање конзистентне групе 10 ученика.

23. Наћи све природне бројеве n за које постоји функција $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ таква да за свако $x \in \mathbb{Z}_n$ важи $f(x) \neq x$, $f(f(x)) = x$ и $f(f(f(x+1)+1)+1) = x$.

24. Дуж праве је постављено n тегова чије су масе у интервалу $(0, 1)$. *Блоком* сматрамо скуп неколико узастопних тегова. Доказати да је за свако k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ могуће поделити тегове у k (дисјунктних) блокова тако да се укупне масе никоја два блока не разликују за више од 1.

Теорија бројева

25. Наћи све природне бројеве који се могу представити у облику збира $[a, b] + [b, c] + [c, a]$ за неке природне бројеве a, b, c, где $[x, y]$ означава најмањи заједнички садржалац x и y.

26. Одредити све природне бројеве n за које једначина $[x] + [2x] + [3x] + \cdots + [nx] = 2017n$ има решење у скупу реалних бројева.

27. За које природне бројеве n постоји n природних бројева $a_1, \ldots, a_n$ таквих да сви збирови $a_i + a_j$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ дају различите остатке при дељењу са $\frac{n(n+1)}{2}$?

28. Доказати да има само коначно много природних бројева n таквих да $n! + 1$ дели $(100n)!$.

29. Наћи све парове непарних природних бројева a, b мањих од 2^{2017} таквих да су бројеви $a^b + b$ и $b^a + a$ дељиви са 2^{2017}.

30. Доказати да постоји бесконачно много сложених природних бројева n за које је $2^{\frac{n-1}{2}} + 1$ дељиво са n.

31. Нека су p и q узајамно прости природни бројеви. Дато је p белих и q црних кутија и pq бомбона распоређених у n кесица. Кесице је могуће распоредити у беле кутије тако да свака кутија садржи по q бомбона, а такође их је могуће распоредити у црне кутије тако да свака кутија садржи по p бомбона. Наћи најмању могућу вредност броја n.

32. Нека је $p > 2$ прост број и нека су x и y природни бројеви са $1 \leqslant x, y \leqslant \frac{p-1}{2}$. Ако је $(px - x^2)(py - y^2)$ потпун квадрат, доказати да је $x = y$.

Решења

1. Означимо $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ и $s_0 = 0$. По услову задатка је $1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{4n^2-1}$. Сада је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n^2} < 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{4n^2-1} = 2$.

   Напомена. У датим условима, сума $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n^2}$ може бити произвољно блиска броју 2. Заиста, ако је $x_m = 2m-1$ и $x_i = 0$ за $i \neq m$, онда је $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_1+\cdots+x_n}{n^2} = (2m-1) \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^2} > (2m-1) \sum_{n=m}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 2 - \frac{1}{m}$.

2. Убацивањем $x = 1$ добијамо $P(0) = 0$, па је $P(x) = xQ(x)$ за неки полином Q. Дата релација постаје $(x+1)^2 Q(x-1) - (x-1)^2 Q(x+1) = 4xQ(x)$, што се може записати као $(x+1)^2[Q(x) - Q(x-1)] + (x-1)^2[Q(x+1) - Q(x)] = 0$. Ако означимо $R(x) = Q(x+1) - Q(x)$, имамо $(x+1)^2 R(x-1) + (x-1)^2 R(x) = 0$. Међутим, водећи коефицијент полинома $(x+1)^2 R(x-1) + (x-1)^2 R(x)$ једнак је двоструком водећем коефицијенту полинома R, па мора бити $R \equiv 0$, тј. $Q = c$ је константа. Следи да је $P(x) = cx$.

3. Увршћивањем $y = 0$ добијамо $g(x) = f(x + f(0))$, па је $f(x + f(y)) = \{y\} + f(x + f(0))$. Тако за $0 \leqslant y < 1$ важи
$$f(x + f(y) - f(0)) = f(x) + y.$$
   Одавде следи да, кад год је $a = f(x_1)$ и $|b - a| < 1$, постоји x_2 такво да је $b = f(x_2)$. Једноставном индукцијом следи да за свако c постоји x за које је $f(x) = c$.

   Према томе, постоје z такво да је $f(z) = f(x + f(0)) + 2$ и y такво да је $x + f(y) = z$, и тада је $f(x + f(y)) = f(x + f(0)) + 2$, тј. $\{y\} = 2$, контрадикција.

4. Означимо $\phi = \frac{\pi}{n+2}$ и претпоставимо да су сви посматрани бројеви већи од $2\cos\phi = \frac{\sin 2\phi}{\sin\phi}$. Индукцијом следи да је $x_k > \frac{\sin(k+1)\phi}{\sin k\phi}$. Заиста, ако је $x_{k-1} > \frac{\sin k\phi}{\sin(k-1)\phi}$, онда је $x_k > 2\cos\phi - \frac{1}{x_{k-1}} > 2\cos\phi - \frac{\sin(k-1)\phi}{\sin k\phi} = \frac{2\sin k\phi\cos\phi - \sin(k-1)\phi}{\sin k\phi} = \frac{\sin(k+1)\phi}{\sin k\phi}$. Тако је $x_n > \frac{\sin(n+1)\phi}{\sin n\phi} = \frac{\sin\phi}{\sin 2\phi} = \frac{1}{2\cos\phi}$, тј. $\frac{1}{x_n} < 2\cos\phi$, контрадикција.

5. Ако је $x \leqslant \frac{3^m}{2^n}$ за неке $m, n \in \mathbb{N}$, онда због $2^n x \leqslant 3^m$ по услову задатка важи $2^n f(x) \leqslant f(3^m) \leqslant 3^m f(1)$, тј. $f(x) \leqslant \frac{3^m}{2^n} f(1)$. Доказаћемо да за свако $\varepsilon > 0$ постоје $m, n \in \mathbb{N}$ такви да је $x \leqslant \frac{3^m}{2^n} < x + \varepsilon$. Тада ће следити $f(x) < (x+\varepsilon) f(1)$ за све $\varepsilon > 0$, и одатле $f(x) \leqslant x f(1)$. На сличан начин се доказује $f(x) \geqslant x f(1)$, па следи $f(x) = x f(1)$ за све x.

   Како је број $\log_2 3$ ирационалан (заиста, ако је $\log_2 3 = \frac{p}{q}$, онда је $2^p = 3^q$, што је немогуће за целе $p, q \neq 0$), по Дирихлеовој теореми постоји природан број k такав да је $\{k \log_2 3\} < \log_2(x+\varepsilon) - \log_2 x$, а тада за $l = \lceil \frac{\log_2 x}{\{k \log_2 3\}} \rceil$ важи $\log_2 x \leqslant l\{k \log_2 3\} = kl \log_2 3 - n < \log_2(x+\varepsilon)$, где је $n = l[k \log_2 3]$. Ово је еквивалентно са $x \leqslant \frac{3^{kl}}{2^n} < x + \varepsilon$.

6. Заменом низа (x_i) низом $(x_i - x_n)$ по потреби, можемо да претпоставимо да је $x_n = 0$. Тада је након развијања
$$2 \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - X)^2 - \sum_{i=1}^{2n-1} (x_i - x_n)^2 = \frac{2n-3}{2n-1} \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 - \frac{4}{2n-1} \sum_{i<j} x_i x_j =$$
$$\frac{1}{2n-1} \left(\sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2 + 2 \sum_{i<j<n} (x_i - x_j)^2 + 2 \sum_{n<i<j} (x_i - x_j)^2 - 4 \sum_{i<n<j} x_i x_j \right) \geqslant 0$$
   јер је $x_i x_j \leqslant 0$ за $i < n < j$.

   Напомена. За дато n, константа 2 се може заменити са $\frac{2n-1}{n}$, што је и најбоља оцена.

7. Уведимо низ полинома $P_i(x,y)$ за $i=0,1,2,\dots$ релацијама $P_{i+1}(x,y)=P_i(x+1,y)-P_i(x,y)$. Степен полинома P_i није већи од $n-1-i$ и важи $P_1(x,y)=\frac{1}{n}$ за $x,y\in\mathbb{N}$ и $x+y\leqslant n$, док за $i>1$ важи $P_i(x,y)=0$ за $x,y\in\mathbb{N}$ и $x+y\leqslant n+1-i$.

   Лема. Ако полином $Q(x,y)$ степена не већег од k задовољава $Q(x,y)=0$ за све $x,y\in\mathbb{N}$ са $x+y\leqslant k+2$, онда је $Q\equiv 0$.

   Доказ. Индукција по k. База $k=0$ је тривијална. Нека је $k>0$. Полином $R(x,y)=Q(x+1,y)-Q(x,y)$ има степен не већи од $k-1$ и задовољава $R(x,y)=0$ за све $x,y\in\mathbb{N}$ са $x+y\leqslant k+1$, па је $R\equiv 0$. Следи да је $Q(x,y)$ константан полином по x, тј. $Q(x,y)=f(y)$ за неки полином f степена навјише k. Међутим, из $f(y)=Q(1,y)=0$ за $y=1,\dots,k+1$ следи $Q\equiv 0$. $\square$

   Дакле, $P_2(x,y)\equiv 0$, а одатле је $P_1(x,y)$ константно по x, тј. $P_1(x,y)=f(y)$ за неки полином f степена највише $n-2$. Пошто је $1-yf(y)=1-yP(1,y)=0$ за $y=1,\dots,n-1$, следи $1-yf(y)=C(1-y)(2-y)\dots(n-1-y)$ за неку константу C, а убацивањем $y=0$ налазимо $C=\frac{1}{(n-1)!}$. Тако је $P(x,y)=\frac{1}{y}[1-(1-y)(1-\frac{y}{2})\dots(1-\frac{y}{n-1})]$

   Најзад, из $P(x+1,y)-P(x,y)=f(y)$ следи да је $P(x,y)$ линеаран полином по x, и то $P(x,y)=xf(y)+g(y)$ за неки полином g степена највише $n-1$. Лако налазимо $P(x,y)=\frac{1}{y}[x-(1-y)(1-\frac{y}{2})\cdots(1-\frac{y}{n-1})(x-\frac{y}{n})]$. Тада је $P(x,nx)=\frac{1}{n}$ константно и одатле $P(0,0)=\frac{1}{n}$.

8. Претпоставимо да оваквих тројки (k,l,m) има само коначно много, тј да постоји N тако да за све $N\leqslant k<l<m$ важи $a_k+a_m\neq 2a_l$. Лако се проверава да скуп $\{a,a+1,\dots,a+7\}$ не садржи подскуп са 5 елемената међу којима никоја три не чине аритметичку прогресију. Следи да је $a_{n+4}\geqslant a_n+8$ за $n\geqslant N$. Шта више, пошто једнакости $a_{n+4}=a_n+8$ и $a_{n+8}=a_{n+4}+8$ не могу истовремено да важе, следи и $a_{n+8}\geqslant a_n+17$. Одатле имамо $a_{n+k}\geqslant a_n+17[\frac{k}{8}]\geqslant a_n+\frac{17}{8}(k-7)$ за $n\geqslant N$ и $k\in\mathbb{N}_0$.

   Тако за $n\geqslant N$ имамо $a_n\geqslant a_{a_n}-a_{n+3}\geqslant\frac{17}{8}(a_n-n-10)$, тј. $a_n\leqslant\frac{17}{9}(n+10)$. Међутим, како је $a_n\geqslant a_N+\frac{17}{8}(n-N-7)$, следи $a_N+\frac{17}{8}(n-N-7)\leqslant\frac{17}{9}(n+10)$, тј. $n\leqslant 9N+143-\frac{72}{17}a_N$, што није тачно за све n.

   Друго решење. Прво ћемо показати да је $a_n\leqslant 2n+6$ за бесконачно много бројева n. Претпоставимо супротно, да за неко N важи $a_n\geqslant 2n+7$ за све $n\geqslant N$. Тада је $2a_n+7\leqslant a_{a_n}\leqslant a_n+a_{n+3}$ за $n\geqslant N$, тј. $a_{n+3}\geqslant a_n+7$. Међутим, ако одаберемо $s\in\{3,4,5\}$ тако да је $a_n\equiv n+s \pmod 3$, имамо $a_n\geqslant a_{a_n}-a_{n+3}\geqslant a_{a_n}-a_{n+s}\geqslant\frac{7}{3}(a_n-n-s)$, одакле је $4a_n\leqslant 7n+7s\leqslant 7n+35$, што је немогуће за велике n.

   За дати скуп $X\subset\mathbb{R}$ означавамо $\mathcal{S}(X)=\{y+z\mid y,z\in X, y\neq z\}$.

   Лема. Ако у скупу X не постоје различити елементи a,b,c такви да је $a+c=2b$, онда је $|\mathcal{S}(X)|\geqslant 3|X|-7$.

   Доказ. Нека су $b_1<b_2<\dots$. Тврђење доказујемо индукцијом по $|X|=r$. Оно је тачно за $r\leqslant 4$ (нпр. за $r=4$ је $b_1+b_2<b_1+b_3<b_1+b_4<b_2+b_4<b_3+b_4$). Претпоставимо да је тачно за $X=\{b_1,\dots,b_{r-1}\}$, али не и за $X\cup\{b_r\}$. То значи да међу збировима b_i+b_r $(i<r)$ највише два нису у скупу $\mathcal{S}(X)$. Збирови $b_{r-1}+b_r$ и $b_{r-2}+b_r$ нису у $\mathcal{S}(A_{r-1})$, тако да мора бити $b_{r-3}+b_r\in\mathcal{S}(X)$. Једина могућност је $b_{r-3}+b_r=b_{r-2}+b_{r-1}$. Такође, $b_{r-4}+b_r\in\mathcal{S}(X)$, па мора бити $b_{r-4}+b_r=b_{r-3}+b_{r-1}$ или $b_{r-4}+b_r=b_{r-3}+b_{r-2}$, али оба ова случаја су немогућа јер су редом еквивалентни $b_{r-4}+b_{r-2}=2b_{r-3}$ и $b_{r-4}+b_{r-1}=2b_{r-3}$, чиме је индукција завршена. $\square$

   Претпоставимо да за неко N не постоје $N<k<l<m$ такви да је $a_k+a_m=2a_l$ и означимо $b_i=a_{N+i}$. За бесконачно много бројева r важи $b_r\leqslant 2r+2N+6$. За такво r, нека су P и Q редом скупови парних и непарних чланова низа b_i $(1\leqslant i\leqslant r)$. Сви елементи скупа $\mathcal{S}(P)\cup\mathcal{S}(Q)$ су парни и не већи од $4r+4N+12$, и притом по претпоставци $2b_i\notin\mathcal{S}(P)\cup\mathcal{S}(Q)$ за свако $1\leqslant i\leqslant r$. Следи $|\mathcal{S}(P)\cup\mathcal{S}(Q)|\leqslant 2r+2N+6-r=r+2N+6$. С друге стране, по леми је $|\mathcal{S}(P)|+|\mathcal{S}(Q)|\geqslant 3|P|-7+3|Q|-7=3r-14>2|\mathcal{S}(P)\cup\mathcal{S}(Q)|$ за $r>4N+26$, контрадикција.

9. Нека су дате тачке A,B,C,D, тим редом на кругу. Означимо $P_A=AB\cdot AC\cdot AD$; аналогно дефинишемо P_B, P_C и P_D. Имамо $\frac{1}{P_A}=\frac{BC\cdot BD\cdot CD}{\Pi}=\frac{4R\cdot P_{BCD}}{\Pi}$, где је R полупречник круга и $\Pi=AB\cdot AC\cdot AD\cdot BC\cdot BD\cdot CD$. Слично је $\frac{1}{P_B}=\frac{4R\cdot P_{ACD}}{\Pi}$, $\frac{1}{P_C}=\frac{4R\cdot P_{ABD}}{\Pi}$ и $\frac{1}{P_D}=\frac{4R\cdot P_{ABC}}{\Pi}$.

Следи да је $\frac{1}{P_A} + \frac{1}{P_C} = \frac{1}{P_B} + \frac{1}{P_D} = \frac{4R \cdot P_{ABCD}}{\Pi}$.

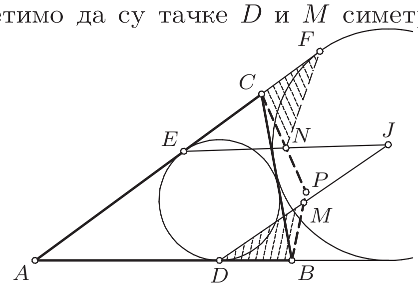
Како се бројеви $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ не могу поделити у два пара с једнаким збиром, одговор је *не*.

10. Нека је $\overrightarrow{DP}/\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\alpha$, $\overrightarrow{EQ}/\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\beta$ и $\overrightarrow{FR}/\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\gamma$. Тада је $s = DP + EQ + FR = \frac{1}{2}|\alpha|a + \frac{1}{2}(|\beta|b + |\gamma|c) \geqslant \sqrt{|\alpha|(|\beta| + |\gamma|)} \cdot \sqrt{ab}$ и слично $s \geqslant \sqrt{|\beta|(|\gamma| + |\alpha|)} \cdot \sqrt{ab}$ и $s \geqslant \sqrt{|\gamma|(|\alpha| + |\beta|)} \cdot \sqrt{ab}$. Довољно је доказати да је бар један од бројева $|\alpha|(|\beta| + |\gamma|)$, $|\beta|(|\gamma| + |\alpha|)$ и $|\gamma|(|\alpha| + |\beta|)$ не мањи од 1.

По Менелајевој теореми је $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma) = -(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$, што се своди на $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -1$. Притом је бар један од производа $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ ненегативан: рецимо, $\alpha\beta \geqslant 0$ (слично је у осталим случајевима). Тада је $|\gamma|(|\alpha| + |\beta|) \geqslant |\alpha\gamma + \beta\gamma| = |1 + \alpha\beta| \geqslant 1$.

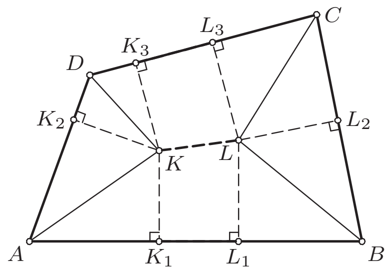
Напомена. Једнакост се достиже ако права ℓ пролази кроз тачку F и важи $DP = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$.

11. Нека се праве BM и CN секу у тачки P. Приметимо да су тачке D и M симетричне тачкама E и N у односу на праву AJ. Посматрајмо тачку F у којој приписани круг наспрам A додирује праву AC. Како је $\sphericalangle JFE = 90°$, важи $NF = NE = MD$. Такође је $\sphericalangle NFC = \sphericalangle NEC = \sphericalangle MDB$ и $FC = DB = \frac{AB+BC-AC}{2}$. Према томе, троуглови DBM и FCN су подударни, па је $\sphericalangle ABP = \sphericalangle DBM = \sphericalangle FCN = 180° - \sphericalangle ACP$, што значи да тачке A, B, C и P леже на истом кругу.

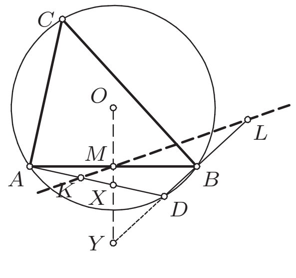


12. Нека су K_1, K_2 и K_3 редом пројекције тачке K на праве BA, AD и DC, а L_1, L_2 и L_3 редом пројекције тачке L на праве AB, BC и CD. Тада је $KL \geqslant K_1L_1$ и $KL \geqslant K_3L_3$.

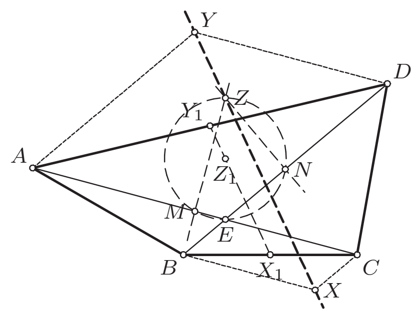
Како је $K_1L_1 + K_3L_3 = |AB - AK_1 - BL_1| + |CD - DK_3 - CL_3| \geqslant |AB + CD - AK_1 - DK_3 - BL_1 - CL_3| = |AB + CD - AK_2 - DK_2 - BL_2 - CL_2| = |AB + CD - AD - BC|$, следи $2KL \geqslant |AB + CD - AD - BC|$.



13. Нека је M средиште странице AB, а X и Y тачке у којима права OM сече праве AD и BD. Из $\sphericalangle AXO = \sphericalangle BAC = \sphericalangle DKO$ следи $OX = OK$, па је $DX = AK$. Слично је $DY = BL$. Сада Менелајева теорема у $\triangle ABD$ даје $\frac{AX}{XD} \cdot \frac{DY}{YB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$, што се може преписати као $\frac{DK}{KA} \cdot \frac{BL}{LD} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$, а то је услов колинеарности тачака K, L и M у $\triangle ABD$.

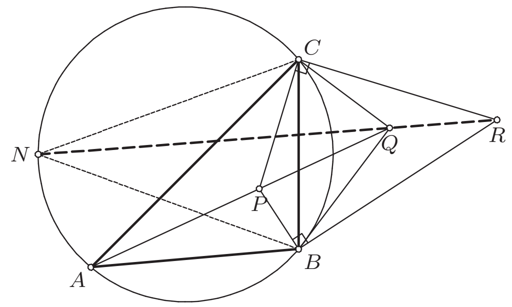


14. Довољно је доказати да су средишта X_1, Y_1 и Z_1 дужи EX, EY и EZ, редом, колинеарна. Како је X_1 уједно и средиште дужи BC, важи $X_1M = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = X_1N$. Слично је $Y_1M = Y_1N$, па тачке X_1 и Y_1 припадају симетрали s дужи MN. С друге стране, како је $\sphericalangle EMZ = \sphericalangle ENZ = 90°$, тачка Z_1 је центар круга описаног око четвороугла $EMZN$, па и она припада симетрали s.



15. Посматрајмо слику Q_1 тачке P при инверзији са центром A и полупречником $\sqrt{AB \cdot AC}$. Због $\frac{AP}{AB} = \frac{AC}{AQ_1}$ важи $\triangle AQ_1C \sim \triangle ABP$ и $\triangle BAQ_1 \sim \triangle PAC$. Следи да је $\sphericalangle BQ_1C = \sphericalangle BQ_1A + \sphericalangle AQ_1C = \sphericalangle PCA + \sphericalangle ABP = \sphericalangle BPC - \sphericalangle BAC = 90°$. Дакле, $Q_1 \equiv Q$.

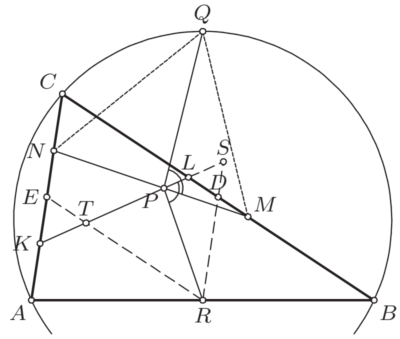
Означимо са N средиште лука BAC. Доказаћемо да је тачка R', симетрична тачки R у односу на симетралу дужи BC, изогонално спрегнута тачки Q у $\triangle NBC$. Одавде ће следити $\sphericalangle CNR = \sphericalangle BNR' = \sphericalangle CNQ$, тј. $R \in NQ$. Довољно је да докажемо да важи $\sphericalangle R'CB = 180^\circ - \sphericalangle NCQ$ и $\sphericalangle R'BC = 180^\circ - \sphericalangle NBQ$.



Углове троугла ABC означавамо уобичајено са α, β, γ. Можемо да сматрамо да је $\beta \geqslant \gamma$. Имамо $\sphericalangle R'CB + \sphericalangle NCQ = \sphericalangle RBC + \sphericalangle NCQ = (90^\circ - \beta + \sphericalangle ABP) + (\frac{\beta-\gamma}{2} + \sphericalangle ACQ) = \frac{\alpha}{2} + \sphericalangle ABP + \sphericalangle ACQ = \frac{\alpha}{2} + \sphericalangle AQC + \sphericalangle ACQ = 180^\circ$. Аналогно је $\sphericalangle R'BC + \sphericalangle NBQ = 180^\circ$, што смо и хтели да докажемо.

16. За почетак приметимо да је $\triangle QAN \cong \triangle QBM$ ($QA = QB$, $AN = BM$ и $\sphericalangle QAN = \sphericalangle QBM$). Одатле је $QM = QN$ и (због $\sphericalangle AQN = \sphericalangle BQM$) $\sphericalangle NQM = \sphericalangle AQB = \sphericalangle ACB = \sphericalangle KCL$, па је $\triangle QNM \sim \triangle CKL$.

Нека су D и E редом средишта дужи BC и AC и нека праве RD и RE редом секу праву KL у тачкама S и T. Троуглови DSL, EKT и RST су хомотетични троуглу CKL, тако да је $DS = DL = DM$, $ET = EK = EN$ и $\triangle QMN \sim \triangle RST$. Следи да су праве MS и NT нормалне на праву KL, одакле је по Талесовој теореми $\frac{SP}{PT} = \frac{MP}{PN}$. Према томе, и троуглови QMP и RSP су слични, те је $\sphericalangle QPM = \sphericalangle RPS$, тј. $\sphericalangle QPK = \sphericalangle RPN$.



17. Раздвојићемо посматрани полином на два: $f(x^2) = x^{2016} + (*)x^{2014} + \cdots + (*)x^2 + (*)$ и $x \cdot g(x^2) = (*)x^{2015} + (*)x^{2013} + \cdots + (*)x^3 + (*)x$. Балтић може да игра тако да оба ова полинома буду дељива са x^2+1. Заиста, кад год Мишко зада вредност неком коефицијенту једног од ова два полинома, Балтић задаје вредност неком другом коефицијенту истог полинома. Овако ће сваком од ова два полинома Балтић одредити последњи коефицијент, и довољно је да их подеси тако да је $f(-1) = g(-1) = 0$.

18. По услову постоји стручњак, рецимо Пера, који је члан бар пет комисија: означимо те комисије са $1,2,3,4,5$. Ако тврђење задатка није тачно, свака од четворки комисија $(1,2,3,4)$, $(1,2,3,5)$ и $(1,2,4,5)$ има осим Пере још бар по једног заједничког члана: назовимо те чланове редом Јова, Сима и Влада (они морају бити различите особе, јер се нико осим Пере не налази у свих пет комисија). Тако се у пресеку комисија 1 и 2 налазе четворица: Пера, Јова, Сима и Влада, што је контрадикција.

19. Означимо са $\mathcal{F}_n$ фамилију свих скупова тегова укупне масе n.

Посматрајмо било који скуп $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \mathcal{F}_n$, где је $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$. Увешћемо пресликавање $f : \mathcal{F}_n \to \mathcal{F}_{n+1}$ на следећи начин. Ако је $x_1 > 1$, онда је $f(A) = \{1, x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, а ако је $x_1 = 1$, онда је $f(A) = \{x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + 2\}$. Јасно је да је пресликавање f инјективно, одакле је $A_n = |\mathcal{F}_n| \leqslant |\mathcal{F}_{n+1}| = A_{n+1}$.

20. Сматраћемо да су странице паралелне осама x и y, при чему су једна од најнижих хоризонталних страница, a_1, на x-оси. Крећући се по многоуглу у позитивном смеру, означимо хоризонталне странице са $a_1, a_2, \ldots, a_{500}$ и усмеримо их у смеру кретања. Свака од страница a_i са x-осом одређује правоугаоник ширине a_i. Ако је страница a_i усмерена у позитивном смеру по x-оси, површина A_i овог правоугаоника је позитивна, а у супротном је негативна. Површина многоугла је $A_1 + A_2 + \cdots + A_{500}$. Како су дужине страница непарне, A_i и A_{i+1} имају различите парности за $1 \leqslant i \leqslant 499$, па овај збир укључује 250 непарних сабирака, те је површина парна.

21. Одговор је 100.

Нека су без смањења општости $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{100}$ ширине, а $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_{100}$ висине добијених правоугаоника. Означмо са $P_{k,\ell}$ правоугаоник $a_i \times b_j$ у подели. Како је $\sum_{i=1}^{100} \sqrt{a_i b_{101-i}} \leqslant \sum_{i=1}^{100} \frac{a_i + b_{101-i}}{2} = 100$, бар један од правоугаоника $P_{i,101-i}$ има површину не већу од 1, а онда то важи и за свих $i(101-i) \geqslant 100$ правоугаоника $P_{k,\ell}$ са $k \leqslant i$ и $\ell \leqslant 101-i$. Дакле, бар 100 правоугаоника има површину не већу од 1.

Овај број се достиже ако се подеси $a_1 = \cdots = a_{99} = 1,01$, $a_{100} = 0,01$ и $b_1 = \cdots = b_{100} = 1$.

22. Одговор је $N = 730$.

<u>*Лема (Ердош-Секереш).*</u> Ако су $a, b \in \mathbb{N}$, сваки низ (различитих) реалних бројева дужине $ab+1$ садржи растући подниз дужине $a+1$, или опадајући подниз дужине $b+1$.

<u>*Доказ.*</u> Нека је дат низ $x_1, x_2, \ldots, x_{ab+1}$. Претпоставимо да нема растућег подниза дужине $a+1$ и за свако i означимо са d_i $(1 \leqslant d_i \leqslant a)$ дужину најдужег растућег подниза чији је први члан x_i. Постоји вредност d која се јавља у низу (d_i) бар $b+1$ пута, рецимо $d_{i_1} = \cdots = d_{i_{b+1}} = d$. Тада је по претпоставци $x_{i_1} > x_{i_2} > \cdots > x_{i_{b+1}}$, што је опадајући подниз дужине $b+1$. $\square$

Покажимо да међу 730 ученика постоји 10-члана конзистентна група. Назовимо области *алгебра, геометрија, комбинаторика и теорија бројева.* Сортирајмо ученике у опадајући низ $U_1, U_2, \ldots, U_{730}$ по поенима из алгебре и означимо са g_i поене ученика U_i из геометрије. Ако низ (g_i) садржи опадајући подниз $g_{j_1}, \ldots, g_{j_{10}}$ дужине 10, имамо конзистентну групу $U_{j_1}, \ldots, U_{j_{10}}$. У супротном, по Леми (за $a = 81$ и $b = 9$), у њему постоји растући подниз $g_{i_1}, \ldots, g_{i_{82}}$ дужине 82. Тако су ученици $U_{i_1}, \ldots, U_{i_{82}}$ сортирани у опадајући поредак у алгебри и растући у геометрији. Међутим, ако је c_k број поена ученика U_{i_k} из комбинаторике, низ $c_1, \ldots, c_{82}$ по леми садржи растући или опадајући подниз дужине 10, и тај подниз одређује конзистентну групу ученика.

Остаје да дамо пример 729 ученика без 10-члане конзистентне групе. Запишимо сваки број $n = 0, 1, \ldots, 728$ у основи 9: $n = (\overline{abc})_9$, и дајмо $(n+1)$-том ученику $(\overline{abc})_9$ поена из алгебре, $(\overline{ab'c'})_9$ поена из геометрије, $(\overline{a'bc'})_9$ поена из комбинаторике и $(\overline{a'b'c})_9$ поена из теорије бројева, где x' означава цифру $8-x$. Лако се проверава да у овој групи нема конзистентне групе 10 ученика.

23. Са id и g редом означавамо пермутације $id(x) = x$ и $g(x) = x+1$. По условима (i) и (ii), скуп $\mathbb{Z}_n$ се може поделити на дисјунктне парове $(x, f(x))$, па $2 \mid n$. По услову (iii) важи $(f \circ g)^3 = id$, одакле следи је $f \circ g$ парна пермутација. Како је пермутација g непарна (јер има тачно $n-1$ инверзија), и f мора бити непарна. С друге стране, f је композиција $\frac{n}{2}$ циклуса дужине 2 (који су сви непарне пермутације), па је њен знак $(-1)^{n/2}$. Према томе, $2 \nmid \frac{n}{2}$, тј. $n \equiv 2 \pmod 4$.

Конструисаћемо пример за $n = 4k+2$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Поделимо скуп $\mathbb{Z}_n$ на парове $(3i, 3i+1)_{i=0}^{k-1}$ и $(3i-1, 4k-i)_{i=0}^{k}$ и дефинишимо функцију f тако да у сваком пару слика један елемент у други. Пермутација h дата са $h(x) = f(x+1)$ тада слика $3i \to 3i$ и $3i-1 \to 3i+1 \to 4n-1-i \to 3i-1$, па је заиста $h^3 = id$.

24. Посматрајмо произвољну поделу тегова на k блокова. Са B_i означимо i-ти блок, а са b_i његову масу. Циљ ћемо постићи поновљеним извршавањем следећег корака.

Нека је B_p један од максималних блокова, а B_q њему најближи минимални блок; нека је без смањења општости $q > p$. Ако је $|b_p - b_q| > 1$, један тег из блока B_{q-1} пребацићемо у B_q. На овај начин маса максималног блока није порасла. Осим тога, ако је $q-1 > p$, величина $S = \sum_{i=1}^{k} |i-p|(B_p - B_i)$ се смањила за масу пребаченог тега. Како се S не може бесконачно смањивати (јер је $S > 0$), у неком тренутку ће се маса блока B_p смањити.

Пошто могућих подела има коначно много, овај процес ће се једном завршити, дајући тражену поделу.

25. Одговор су сви природни бројеви који нису степени двојке.

Ако је $n = 2^k(2l+1)$ за $k \geqslant 0$ и $l \geqslant 1$, онда за $(a, b, c) = (2^k, 2^k, 2^k l)$ имамо $[a,b]+[b,c]+[c,a] = 2^k + 2^k l + 2^k l = n$.

Претпоставимо сада да је $n = [a,b] + [b,c] + [c,a] = 2^k$, при чему је k најмање могуће. Међу бројевима a, b, c су бар два парна (у супротном $2 \nmid n$), рецимо $b = 2b_1$ и $c = 2c_1$. Тада је $[a,b_1]+[b_1,c_1]+[c_1,a] = \frac{1}{2}[a,b]+\frac{1}{2}[b,c]+\frac{1}{2}[c,a] = 2^{k-1}$, контрадикција са избором k.

26. За $k \in \mathbb{N}$ и $z > 0$, $[kt]$ је једнако броју целобројних тачака (k, y) на или испод праве $y = tx$. Тако је $f(t) = [t]+[2t]+\cdots+[nt]$ једнако броју тачака унутар правоугаоника $ABCD$ које су на или испод дијагонале AC, где $A(0,0)$, $B(n+1,0)$, $C(n+1,t(n+1))$. Специјално, ако је $t(n+1) = m$ природан број, онда испод и изнад дијагонале AC има једнак број целобројних тачака, па је $f(t) = \frac{(m-1)n+N}{2}$, где је $N = (m, n+1) - 1$ број целобројних тачака на дијагонали AC. За $m = 4035$ је $f(\frac{4035}{n+1}) = 2017n + \frac{(4035,n+1)-1}{2}$.

Ако је $(n+1, 4035) = 1$, $x = \frac{4035}{n+1}$ је решење једначине.

Нека је сада $(n+1, 4035) \neq 1$. Узимањем $x < \frac{4035}{n+1}$ губимо $(4035, n+1) - 1$ целобројних тачака на дијагонали, па је $f(x) \leqslant 2017n - \frac{(4035,n+1)-1}{2} < 2017n$. То значи да једначина $f(x) = 2017n$ тада нема решења.

27. Из услова задатка следи да су свих $n(n-1)$ разлика $a_i - a_j$ $(i \neq j)$ различите од нуле и међусобно различите по модулу $\frac{n(n+1)}{2}$: заиста, из $a_i - a_j = a_k - a_l$ би следило $a_i + a_l = a_j + a_k$. Међутим, за $n \geqslant 3$ је $n(n-1) > \frac{n(n+1)}{2} - 1$. Остају само случајеви $n = 1$ и $n = 2$, а за њих постоје примери $a_1 = 0$ и $(a_1, a_2) = (0, 1)$.

28. Сматраћемо да је $n > 100$. Нека је $n! + 1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ канонска факторизација броја $n! + 1$. По претпоставци је $n < p_i \leqslant 100n$ за све i. Шта више, експонент простог броја p_i у $(100n)!$ је мањи од 100, па је $\alpha_i < 100$. Следи да је $n^{n/2} < n! + 1 < (p_1 p_2 \dots p_k)^{99}$. С друге стране, подсетимо се да производ свих простих бројева мањих од $100n$ није већи од 4^{100n}. Следи да је $n^{n/2} < 4^{9900n}$, тј. $n < 4^{19800}$.

29. Пошто је $a^b \equiv a \pmod 4$, из услова задатка следи да $4 \mid a+b$, па можемо да претпоставимо да је $a \equiv 1$ и $b \equiv 3 \pmod 4$. Нека $2^k \parallel a - 1$ и $2^\ell \parallel b + 1$, где су $k, \ell \geqslant 2$. По леми о дизању експонента имамо $2^{k+1} \parallel a^{b-1} - 1$ и $2^{k+\ell} \parallel b^{a-1} - 1$. Следи да $2^{k+1} \parallel a(a^{b-1}-1) - b(b^{a-1}-1) = (a^b + b) - (b^a + a)$, одакле је $k \geqslant 2016$. Према томе, $a = 1$ или $a = 2^{2016} + 1$. Осим тога, пошто је тада $a^b \equiv a \pmod{2^{2017}}$, имамо $2^{2017} \mid a + b$, тј. $b = 2^{2017} - a$.

Једина решења (a, b) су парови $(1, 2^{2017} - 1)$ и $(2^{2016} + 1, 2^{2016} - 1)$ са пермутацијама.

30. Потражићемо n у облику $n = \frac{2^m+1}{3}$, где је m сложен непаран број - тада је и n сложен.

Услов $n \mid 2^{\frac{n-1}{2}} + 1$ је задовољен ако $m \mid \frac{2^{m-1}-1}{3}$. Ставимо $m = 2^k - 1$. Како $3 \mid 2^{\frac{m-1}{2}} + 1$, довољно је да важи $m \mid 2^{\frac{m-1}{2}} - 1$, тј. $k \mid \frac{m-1}{2} = 2^{k-1} - 1$.

Посматрајмо низ $a_0 = 11$ и $a_{i+1} = 2^{a_i} - 1$. Како је $a_1 = 2047 = 23 \cdot 89$, једноставна индукција показује да је a_i сложен број и $a_i \mid 2^{a_i - 1} - 1$ за све $i \geqslant 1$. Заиста, из $a_i \mid 2(2^{a_i-1} - 1) = a_{i+1} - 1$ следи $a_{i+1} = 2^{a_i} - 1 \mid 2^{a_{i+1}-1} - 1$.

Напомена. Могуће су разне конструкције, нпр. $n = \frac{4^p+1}{5}$ за прост број $p > 5$.

31. Посматрајмо жељене распореде у црне и беле кутије и произвољан скуп кутија S. Кесицу зовемо *унутрашњом* ако је у жељеним распоредима садржана и у белој и у црној кутији у скупу S, а *спољашњом* ако је садржана у само једној кутији у S. Било који скуп са b белих и c црних кутија за $b + c < p + q$ садржи спољашњу кесицу: у супротном би било $bq = cp$, што је немогуће због $(p, q) = 1$.

Индукцијом по x доказујемо да за свако $x < p + q$ постоји скуп од укупно x белих и црних кутија који садрже бар $x - 1$ унутрашњих кесица. Ово је тачно за $x = 1$. Ако постоји овакав скуп са $x < p + q - 1$ кутија, у њему има бар једна спољашња кесица, и довољно је прикључити скупу другу кутију која садржи ову спољашњу кесицу (чиме она постаје унутрашња); добијени скуп има $x + 1$ кутија и бар x унутрашњих кесица. Тако за $x = p + q - 1$ имамо бар $x - 1$ унутрашњих и једну спољашњу, тј. укупно бар $p + q - 1$ кесица. Дакле, $n \geqslant p + q - 1$.

Показаћемо индукцијом по $p+q$ да је $p+q-1$ кесица довољно. Нека је $p=q+r$, $r \geqslant 0$. По индуктивној претпоставци можемо да спакујемо бомбоне у $q+r-1$ кесица тако да се кесице могу распоредити у r белих кутија са по q бомбона, или у q црних кутија са по r бомбона. Додајмо још q нових кесица са по q бомбона, што укупно даје $p+q-1$ кесица. Нове кесице се могу распоредити по једна у q додатних белих кутија (чиме бисмо имали p кутија са по q бомбона), или се може ставити по једна у постојеће црне кутије (чиме бисмо имали q кутија са по p бомбона). Овако је проблем решен и за пар (p, q).

32. Нека је $(px-x^2)(py-y^2)=k^2$. Како је $k^2-(xy)^2=pxy(p-x-y)>0$, следи $k>xy$ и $k \equiv \pm xy \pmod{p}$.

   (i) $k-xy=lp$ за неко $l \in \mathbb{N}$. Тада је $lp(lp+2xy)=pxy(p-x-y)$, што се своди на $xy(p-x-y-2l)=l^2p>0$, па $p \mid x+y+2l$ и $0<x+y+2l<p$, што је немогуће.

   (ii) $k+xy=lp$ за неко $l \in \mathbb{N}$. Тада је $lp(lp-2xy)=pxy(p-x-y)$, што се своди на $xy(p-x-y+2l)=l^2p$, па $p \mid x+y-2l$. Међутим, из $lp=k+xy<\frac{p^2}{2}$ следи $0<2l<p$, па мора бити $x+y=2l$. Сада је и $xy=l^2$, па је $x=y=l$.