Додатна настава у Математичкој гимназији
04.02.2007.

Пројективна геометрија

Миливоје Лукић
milivoje.lukic@gmail.com

1. Дворазмера. Хармонијска спрегнутост. Перспективитет. Пројективитет

Дефиниција: Нека су тачке A, B, C и D колинеарне. **Дворазмера** парова тачака A, B и C, D је

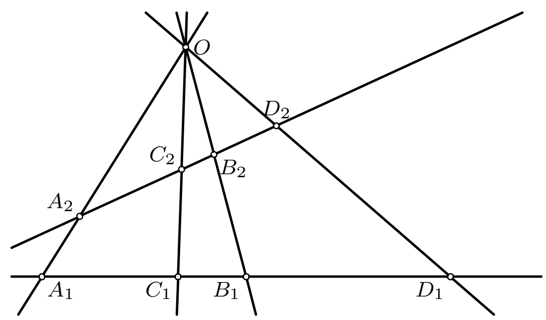
$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}. \tag{1}$$

Нека су a, b, c, d четири праве које припадају једном прамену. За дате праве p_1 и p_2 означимо $A_i = a \cap p_i$, $B_i = b \cap p_i$, $C_i = c \cap p_i$, $D_i = d \cap p_i$, за $i = 1, 2$. Тада је

$$\mathcal{R}(A_1,B_1;C_1,D_1) = \mathcal{R}(A_2,B_2;C_2,D_2). \tag{2}$$

Зато је коректно дефинисати дворазмеру парова правих једног прамена као

$$\mathcal{R}(a,b;c,d) = \mathcal{R}(A_1,B_1;C_1,D_1). \tag{3}$$

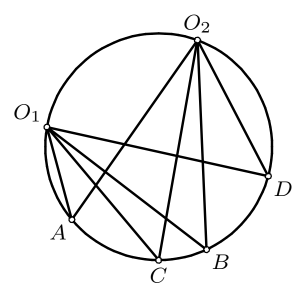


Нека су O_1, O_2, A, B, C, D коцикличне тачке. Тада је

$$\mathcal{R}(O_1A,O_1B;O_1C,O_1D) = \mathcal{R}(O_2A,O_2B;O_2C,O_2D). \tag{4}$$

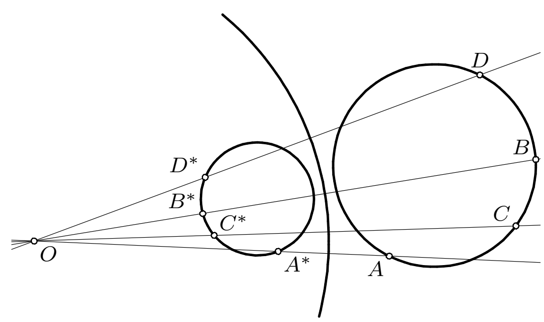
Зато је коректно дефинисати дворазмеру парова тачака за коцикличне тачке, као

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \mathcal{R}(O_1A,O_1B;O_1C,O_1D). \tag{5}$$



Нека су A, B, C, D колинеарне или коцикличне тачке, и нека инверзија са центром у O пресликава тачке A, B, C, D у тачке A^*, B^*, C^*, D^*. Тада је

$$\mathcal{R}(A,B;C,D) = \mathcal{R}(A^*,B^*;C^*,D^*). \tag{6}$$



Дефиниција: Нека су тачке A, B, C и D колинеарне или коцикличне. Парови тачака A, B и C, D су **хармонијски спрегнути** ако је $\mathcal{R}(A,B;C,D) = -1$, што се означава и са $\mathcal{H}(A,B;C,D)$.

Дефиниција: **Перспективитет** у односу на тачку S, у ознаци $\overset{S}{\barwedge}$, је свако пресликавање праве или круга l_1 на праву или круг l_2, такво да уколико је l_1 или l_2 круг онда садржи тачку S, при коме се свака тачка $A_1 \in l_1$ слика у тачку $A_2 = OA_1 \cap l_2$. Према претходним ставовима, перспективитет чува дворазмеру, а самим тим и хармонијску спрегнутост.

Дефиниција: **Пројективитет** је свако пресликавање праве или круга l_1 на праву или круг l_2 које се може представити као композиција перспективитета.

Теорема: Нека су тачке A, B, C, D_1 и D_2 колинеарне или коцикличне. Ако је $\mathcal{R}(A,B;C,D_1) = \mathcal{R}(A,B;C,D_2)$, онда је $D_1 = D_2$. Другим речима, пројективитет са три фиксне тачке је идентитет.

Теорема: Ако су тачке A, B, C, D међусобно различите, и $\mathcal{R}(A,B;C,D)=\mathcal{R}(B,A;C,D)$ онда је $\mathcal{H}(A,B;C,D)$.

2. Дезаргова теорема

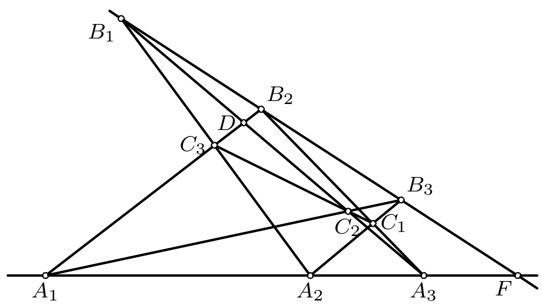
Троуглови $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ су **перспективни у односу на центар** ако праве A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 припадају једном прамену, а **перспективни у односу на осу** ако су тачке $K=B_1C_1\cap B_2C_2$, $L=A_1C_1\cap A_2C_2$, $M=A_1B_1\cap A_2B_2$ колинеарне.
Дезаргова теорема: Два троугла су перспективна у односу на центар ако и само ако су перспективни у односу на осу.

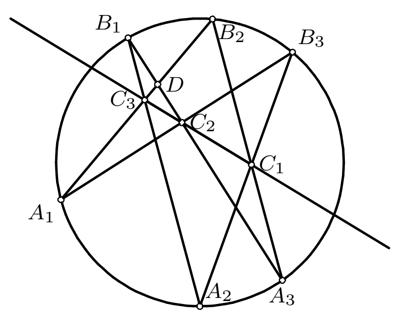
3. Папасова и Паскалова теорема

Папасова теорема: Нека се тачке A_1, A_2, A_3 налазе на правој a, а тачке B_1, B_2, B_3 на правој b. Нека је $A_1B_2\cap A_2B_1=C_3$, $A_1B_3\cap A_3B_1=C_2$, $A_2B_3\cap A_3B_2=C_1$. Тада су C_1, C_2, C_3 колинеарне.
Доказ: Означимо $C_2'=C_1C_3\cap A_3B_1$, $D=A_1B_2\cap A_3B_1$, $E=A_2B_1\cap A_3B_2$, $F=a\cap b$. Наш циљ је да докажемо да су тачке C_2 и C_2' идентичне. Уочимо низ пројективитета

$$A_3B_1DC_2 \overset{A_1}{\barwedge} FB_1B_2B_3 \overset{A_2}{\barwedge} A_3EB_2C_1 \overset{C_3}{\barwedge} A_3B_1DC_2'.$$

На тај начин смо добили пројективно пресликавање праве A_3B_1 при ком су фиксне тачке A_3, B_1, D, а тачка C_2 се пресликава у тачку C_2'. Како је пројективно пресликавање са три фиксне тачке идентичко пресликавање, следи да је $C_2=C_2'$. $\square$





Паскалова теорема: Нека су A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 коцикличне тачке. Тачке добијене у пресецима A_1B_2 са A_2B_1, A_1B_3 са A_3B_1, A_2B_3 са A_3B_2 леже на једној правој.
Доказ: Тачке C_2', D и E се дефинишу као у доказу Папасове теореме. Затим уочимо сличан низ пројективитета

$$A_3B_1DC_2 \overset{A_1}{\barwedge} A_3B_1B_2B_3 \overset{A_2}{\barwedge} A_3EB_2C_1 \overset{C_3}{\barwedge} A_3B_1DC_2',$$

и на исти начин закључујемо да је $C_2=C_2'$. $\square$

4. Пол. Полара. Брijаншонова и Брокарова теорема

Дефиниција: Нека је дат круг $k(O,r)$. Нека је тачка A^* слика тачке $A\neq O$ при инверзији у односу на круг k. Права a која садржи тачку A^* и нормална је на OA назива се **полара** тачке A у односу на круг k. Обратно, тачка A се назива **пол** праве a у односу на круг k.
Теорема: Нека је дат круг $k(O,r)$. Нека су праве a и b поларе тачака A и B у односу на k. Тачка A припада правој b ако и само ако тачка B припада правој a.
Доказ: $A\in b$ ако и само ако $\angle AB^*O=90^\circ$. Аналогно, $B\in a$ ако и само ако $\angle BA^*O=90^\circ$, па остаје још да се примети да из основних својстава инверзије следи $\angle AB^*O=\angle BA^*O$. $\square$
Дефиниција: Тачке A и B називамо **конјугованим** у односу на круг k ако једна од њих лежи на полари друге.
Теорема: Ако права одређена двема конјугованим тачкама A и B сече круг $k(O,r)$ у тачкама C и D, онда је $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. Обратно, ако важи $\mathcal{H}(A,B;C,D)$, при чему C и D леже на кругу k, онда су A и B конјуговане у односу на круг k.
Доказ: Нека су C_1, D_1 пресечне тачке OA са кругом k. Како инверзија чува дворазмеру, важи $\mathcal{R}(C_1,D_1;A,A^*)=\mathcal{R}(C_1,D_1;A^*,A)$, па је

$$\mathcal{H}(C_1,D_1;A,A^*). \tag{7}$$

Нека је сада p права која садржи тачку A и сече круг k у тачкама C и D. Нека је $E = CC_1 \cap DD_1$, $F = CD_1 \cap DC_1$. Како је C_1D_1 пречник круга k, важи $C_1F \perp D_1E$ и $D_1F \perp C_1E$, па је F ортоцентар троугла C_1D_1E. Нека је $B = EF \cap CD$ и $\bar{A}^* = EF \cap C_1D_1$. Због

$$C_1D_1A\bar{A}^* \overset{E}{\barwedge} CDAB \overset{F}{\barwedge} D_1C_1A\bar{A}^*$$

је $\mathcal{H}(C_1, D_1; A, \bar{A}^*)$ и $\mathcal{H}(C, D; A, B)$. Одавде, због (7), закључујемо две ствари:
Прво, из $\mathcal{H}(C_1, D_1; A, \bar{A}^*)$ и $\mathcal{H}(C_1, D_1; A, A^*)$ следи $A^* = \bar{A}^*$, па је $A^* \in EF$, а како је и $EF \perp C_1D_1$, права $EF = a$ је полара тачке A. Друго, за тачку B која, како смо управо видели, припада полари тачке A важи $\mathcal{H}(C, D; A, B)$. Овим је теорема доказана. □

Брианшонова теорема: Нека је шестоугао $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ описан око круга k. Праве A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 се секу у једној тачки.
Доказ: Користићемо конвенцију по којој тачку и праву који су у односу пол-полара означавамо истим малим и великим словом абецеде. Означимо са M_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, тачку додира стране A_iA_{i+1} са кругом k. Како је $m_i = A_iA_{i+1}$, важи и $M_i \in a_i$, $M_i \in a_{i+1}$, па је $a_i = M_{i-1}M_i$.

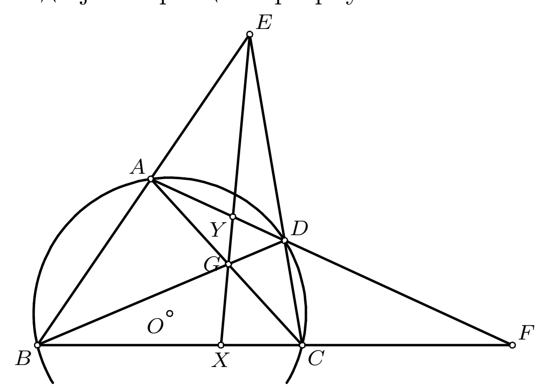
Нека је $b_j = A_jA_{j+3}$, $j = 1, 2, 3$. Тада је $B_j = a_j \cap a_{j+3} = M_{j-1}M_j \cap M_{j+3}M_{j+4}$. Треба доказати да постоји тачка P таква да $P \in b_1, b_2, b_3$, или аналогно, да постоји права p таква да $B_1, B_2, B_3 \in p$. Другим речима, треба доказати да су B_1, B_2, B_3 колинеарне. Међутим, то следи непосредно из Паскалове теореме, ако је применимо на тетивни шестоугао $M_1M_3M_5M_4M_6M_2$. Резимирајући управо изложени доказ, можемо рећи да се Брианшонова теорема добија из Паскалове теореме заменом свих тачака њиховим поларама и свих правих њиховим половима. □

Брокарова теорема: Дат је тетивни четвороугао $ABCD$, уписан у круг k са средиштем O. Нека је $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$, $G = AC \cap BD$. Тада је O ортоцентар троугла EFG.
Доказ: Доказаћемо да је права EG полара тачке F. Означимо $X = EG \cap BC$ и $Y = EG \cap AD$. Тада је

$$ADYF \overset{E}{\barwedge} BCXF \overset{G}{\barwedge} DAYF,$$

одакле добијамо $\mathcal{H}(A, D; Y, F)$ и $\mathcal{H}(B, C; X, F)$. Према једној од карактеризација поларе наведених раније у тексту, тачке X и Y леже на полари тачке F, одакле следи да је права EG полара тачке F.

Како је EG полара тачке F, важи $EG \perp OF$. Аналогно је и $FG \perp OE$, па је O ортоцентар троугла EFG. □



5. Задаци

1. Дат је четвороугао $ABCD$. Нека је $P = AB \cap CD$, $Q = AD \cap BC$, $R = AC \cap PQ$, $S = BD \cap PQ$. Доказати да је $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$.

2. Дат је троугао ABC и тачка M на страници BC. Нека је N тачка праве BC таква да је $\angle MAN = 90°$. Доказати да је $\mathcal{H}(B, C; M, N)$ ако и само ако је AM симетрала угла $\angle BAC$.

3. Дате су две тачке A и B и на правој AB трећа тачка C. Конструисати само лењиром тачку D праве AB такву да је $\mathcal{H}(A, B; C, D)$.

4. Нека су A, B, C дијагоналне тачке четвороугла $PQRS$, односно $A = PQ \cap RS$, $B = QR \cap SP$, $C = PR \cap QS$. Ако је дато A, B, C, S, реконструисати само лењиром тачке P, Q, R.

5. Нека уписани круг у троугао ABC додирује странице BC, AC и AB у тачкама D, E и F. Нека је тачка M таква да круг k_1, уписан у троугао BCM, додирује страницу BC у тачки D, а странице BM и CM у тачкама P и Q. Доказати да су праве EF, PQ, BC конкурентне.

6. Дат је троугао ABC и на страници BC тачке D, E тако да је $BD = DE = EC$. Права p сече дужи AB, AD, AE, AC у тачкама K, L, M, N, редом. Доказати да је $KN \geq 3LM$.

7. На страни AB четвороугла $ABCD$ узета је тачка M_1. Нека је M_2 пројекција M_1 на праву BC из D, M_3 пројекција M_2 на CD из A, M_4 пројекција M_3 на DA из B, M_5 пројекција M_4 на AB из C итд. Доказати да је $M_{13} = M_1$.

8. (*теорема о лептиру*) На кругу k се налазе тачке M и N. Ако је P средиште тетиве MN, а AB и CD (A и C су са исте стране MN) произвољне две тетиве круга k које садрже тачку P, тада дужи AD и BC тетиву MN секу у тачкама које се налазе на једнаким растојањима од P.

9. Нека је ABC троугао, и D, E тачке на страницама AB и AC редом тако да је DE паралелно са BC. Нека је P тачка унутар троугла ADE, и праве BP и CP секу DE у тачкама F и G, редом. Кругови описани око троуглова PDG и PFE секу се у тачкама P и Q. Доказати да су тачке A, P и Q колинеарне.

10. (ИМО1997.предлог) Нека је $A_1A_2A_3$ неједнакокраки троугао са центром уписаног круга у I. Нека је C_i, $i = 1, 2, 3$, мањи круг кроз I тангентан на A_iA_{i+1} и A_iA_{i+2} (сабирање индекса се врши по модулу 3). Нека је B_i, $i = 1, 2, 3$, друга тачка пресека C_{i+1} и C_{i+2}. Доказати да су центри описаних кругова троуглова A_1B_1I, A_2B_2I, A_3B_3I колинеарни.

11. Дат је троугао ABC и тачка T. Нека су P и Q подножја нормала из T на праве AB и AC, редом, и нека су R и S подножја нормала из A на праве TC и TB, редом. Доказати да тачка пресека правих PR и QS лежи на правој BC.

12. Дат је троугао ABC и тачка M. Права која пролази кроз M сече праве AB, BC и CA у тачкама C_1, A_1 и B_1, респективно. Праве AM, BM и CM секу описани круг око троугла ABC редом у тачкама A_2, B_2 и C_2. Доказати да се праве A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 секу у једној тачки која се налази на кругу описаном око троугла ABC.

13. Нека су P и Q изогонално спрегнуте тачке и нека су њихови педални троуглови $P_1P_2P_3$ и $Q_1Q_2Q_3$. Нека је $X_1 = P_2Q_3 \cap P_3Q_2$, $X_2 = P_1Q_3 \cap P_3Q_1$, $X_3 = P_1Q_2 \cap P_2Q_1$. Тада тачке X_1, X_2, X_3 леже на правој PQ. Доказати.

14. Доказати: ако су тачке A и M конјуговане у односу на круг k, онда је круг над пречником AM ортогоналан на круг k.

15. На круг k су из тачке A (која се налази у спољашњости датог круга) конструисане две тангенте AM и AN и сечица која сече круг у тачкама K и L. Нека је l произвољна права паралелна са AM. Нека KM и LM секу праву l у тачкама P и Q, редом. Доказати да MN полови дуж PQ.

16. Тачка изогонално спрегнута тежишту назива се Лемуанова тачка. Праве које спајају темена троугла са Лемуановом тачком називају се симедијане. Нека се тангенте на описани круг Γ троугла ABC у тачкама B и C секу у тачки P. Доказати да је права AP симедијана троугла ABC.

17. Дат је троугао ABC. Нека уписани круг тог троугла додирује странице BC, CA, AB у тачкама M, N, P, редом. Доказати да се AM, BN и CP секу у једној тачки.

18. Нека је $ABCD$ тангентан четвороугао и нека странице AB, BC, CD, DA додирују круг уписан у $ABCD$ у тачкама M, N, P, Q. Доказати да се праве AC, BD, MP и NQ секу у једној тачки.

19. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао, коме се дијагонале AC и BD секу у O, продужеци страница AB и CD у тачки E, тангенте на описани круг у тачкама A и D у K, а тангенте у тачкама B и C у тачки L. Доказати да се тачке E, K, O и L колинеарне.

20. Дат је тетивни четвороугао $ABCD$. Праве AB и CD се секу у тачки E, а дијагонале AC и BD у тачки F. Описани кругови око троуглова $\triangle AFD$ и $\triangle BFC$ се секу поново у тачки H. Доказати да је $\angle EHF = 90°$.

6. Решења

1. Означимо $T = AC \cap BD$. Уочимо низ перспективитета

$$PQRS \overset{A}{\barwedge} BDTS \overset{C}{\barwedge} QPRS.$$

Како перспективитети чувају дворазмеру, важи $\mathcal{R}(P,Q;R,S) = \mathcal{R}(Q,P;R,S)$, одакле следи $\mathcal{H}(P,Q;R,S)$. $\square$

2. Означимо $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle CBA$, $\gamma = \angle ACB$ и $\varphi = \angle BAM$. Применом синусне теореме на троуглове $\triangle ABM$ и $\triangle ACM$ добијамо

$$\frac{BM}{MC} = \frac{BM}{AM}\frac{AM}{CM} = \frac{\sin\varphi}{\sin\beta}\,\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha-\varphi)}.$$

Слично, применом синусне теореме на троуглове $\triangle ABN$ и $\triangle ACN$ добијамо

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BN}{AN}\frac{AN}{CN} = \frac{\sin(90^\circ-\varphi)}{\sin(180^\circ-\beta)}\,\frac{\sin\gamma}{\sin(90^\circ+\alpha-\varphi)}.$$

Комбинујући претходне две једначине, добијамо

$$\frac{BM}{MC} : \frac{BN}{NC} = \frac{\tan\varphi}{\tan(\alpha-\varphi)}.$$

Дакле, $|\mathcal{R}(B,C;M,N)| = 1$ је еквивалентно са $\tan\varphi = \tan(\alpha-\varphi)$, односно са $\varphi = \alpha/2$. Како је $B \neq C$ и $M \neq N$, $|\mathcal{R}(B,C;M,N)| = 1$ је еквивалентно са $\mathcal{R}(B,C;M,N) = -1$, па је овим тврђење задатка доказано. $\square$

3. Као мотивација за конструкцију послужиће нам задатак 1. Одаберимо тачку K ван праве AB и тачку L на правој AK, различиту од A и K. Нека је $M = BL \cap CK$ и $N = BK \cap AM$. Затим конструишемо тачку D као $D = AB \cap LN$. Из задатка 1 следи да је заиста $\mathcal{H}(A,B;C,D)$. $\square$

4. Означимо $D = AS \cap BC$. Према задатку 1 следи да је $\mathcal{H}(R,S;A,D)$. Са овим на уму можемо приступити конструкцији: Конструишимо тачку $D = AS \cap BC$. Сада имамо тачке A, D и S, па према претходном задатку можемо конструисати тачку R такву да је $\mathcal{H}(A,D;S,R)$. Сада конструишемо $P = BS \cap CR$ и $Q = CS \cap BR$, чиме је конструкција завршена. $\square$

5. Познато је (и лако се доказује Чевином теоремом) да се праве AD, BE и CF секу у тзв Жергоновој тачки троугла ABC, коју означавамо са G. Означимо $X = BC \cap EF$. Као у задатку 1, важи $\mathcal{H}(B,C;D,X)$. Ако означимо $X' = BC \cap PQ$, аналогно важи и $\mathcal{H}(B,C;D,X')$, па је $X = X'$. $\square$

6. Означимо $x = KL$, $y = LM$, $z = MN$. Треба доказати да је $x+y+z \geq 3y$, односно $x+z \geq 2y$. Како је $\mathcal{R}(K,N;L,M) = \mathcal{R}(B,C;D,E)$, важи

$$\frac{x}{y+z} : \frac{x+y}{z} = \frac{\overrightarrow{KL}}{\overrightarrow{LN}} : \frac{\overrightarrow{KM}}{\overrightarrow{MN}} = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} : \frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2},$$

одакле је $4xz = (x+y)(y+z)$.

Када би било $y > (x+z)/2$, било би

$$x+y > \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z = 2\frac{1}{4}(x+x+x+z) \geq 2\sqrt[4]{xxxz},$$

и аналогно $y+z > 2\sqrt[4]{xzzz}$, па и $(x+y)(y+z) > 4xz$, у супротности са ранијим закључком. Дакле, претпоставка $y > (x+z)/2$ је била погрешна, односно важи $y \leq (x+z)/2$. Испитајмо још када важи једнакост: ако је $y = (x+z)/2$, онда је $4xz = (x+y)(x+z) = (3x+z)(x+3z)/4$, што је еквивалентно са $(x-z)^2 = 0$. Дакле, једнакост важи ако је $x = y = z$. Остављамо читаоцу да докаже да је $x = y = z$ испуњено ако и само ако је $p \parallel BC$. $\square$

7. Нека је $E = AB \cap CD$, $F = AD \cap BC$. Уочимо низ перспективитета

$$ABEM_1 \overset{D}{\barwedge} FBCM_2 \overset{A}{\barwedge} DECM_3 \overset{B}{\barwedge} DAFM_4 \overset{C}{\barwedge} EABM_5.$$

Према условима задатка, овај низ перспективитета треба применити још двапут да би се дошло до тачке M_{13}. Уочимо да је наведени низ перспективитета пресликао тачку A у E, E у B, а B у A. И без исписивања свих перспективитета, јасно је да ће трострука примена овог низа перспективитета остављати фиксним тачке A, B и E, док ће тачку M_1 сликати у тачку M_{13}. Стога, мора бити $M_1 = M_{13}$. $\square$

8. Нека је X' тачка симетрична тачки Y у односу на P. Уочимо да је

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(M,N;X,P) &= \mathcal{R}(M,N;P,Y) \quad (\text{из } MNXP \overset{D}{\barwedge} MNAC \overset{B}{\barwedge} MNPY)\\ &= \mathcal{R}(N,M;P,X') \quad (\text{јер централна симетрија са центром у } P\text{, као и све}\\ &\qquad \text{изометрије, чува размеру, а самим тим и дворазмеру})\\ &= \frac{1}{\mathcal{R}(N,M;X',P)} = \mathcal{R}(M,N;X',P) \quad (\text{из општих својстава дворазмере})\end{aligned}$$

Следи да је $X = X'$. $\square$

9. Означимо $J = DQ \cap BP$, $K = EQ \cap CP$. Уколико докажемо да је $JK \parallel DE$, одатле ће следити да су троуглови BDJ и CEK перспективни у односу на центар, па ће према Дезарговој теореми бити и перспективни у односу на осу, што управо значи да су тачке A, P, Q колинеарне (охрабрујемо читаоца да провери ове тврдње).

   Приступимо сада доказивању паралелности правих JK и DE. Означимо $T = DE \cap PQ$. Применом Менелајеве теореме на троугао DTQ и праву PF добијамо

$$\frac{\overrightarrow{DJ}}{\overrightarrow{JQ}} \frac{\overrightarrow{QP}}{\overrightarrow{PT}} \frac{\overrightarrow{TF}}{\overrightarrow{FD}} = -1.$$

   Аналогно је из троугла ETQ и праве PG

$$\frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KQ}} \frac{\overrightarrow{QP}}{\overrightarrow{PT}} \frac{\overrightarrow{TG}}{\overrightarrow{GE}} = -1.$$

   Дељењем претходне две једнакости, уз коришћење релације $DT \cdot TG = FT \cdot TE$ (што важи јер је тачка T на радикалној оси кругова описаних око $\triangle DPG$ и $\triangle FPE$), добијамо

$$\frac{\overrightarrow{DJ}}{\overrightarrow{JQ}} = \frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KQ}}.$$

   Одавде је $JK \parallel DE$, па је и тврђење задатка у потпуности доказано. $\square$

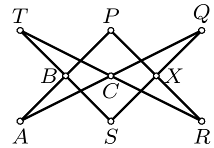
10. Применимо инверзију са центром у I. Остављамо читаоцу да конструише инверзивну слику. Приметимо само да се услов да је I центар уписаног круга трансформише у услов да су кругови $A_i^*A_{i+1}^*I$ истих полупречника (Зашто? Уколико је растојање тачке I од праве XY једнако r, а полупречник инверзије је R, онда је пречник круга IX^*Y^* једнак R^2/r). Сада искористимо следеће једноставно тврђење, које читалац може сам доказати: "Ако су k_1, k_2, k_3 три круга који садрже исту тачку I, такви да се никоја два од њих не додирују, онда су њихови центри колинеарни ако и само ако постоји још једна заједничка тачка $J \neq I$ пресека ова три круга." У инверзивној слици, ово значи да је наш задатак да докажемо да се праве $A_1^*B_1^*$, $A_2^*B_2^*$, $A_3^*B_3^*$ секу у једној тачки.

    Да би ово важило, довољно је да одговарајуће странице троуглова $A_1^*A_2^*A_3^*$ и $B_1^*B_2^*B_3^*$ буду паралелне, јер су тада ови троуглови перспективни у односу на осу (при чему је та оса бесконачно далека права), а затим су према Дезарговој теореми перспективни и у односу на центар. Означимо са P_i^* центар круга $A_{i+1}^*A_{i+2}^*I$, а са Q_i^* подножје нормале из I на страницу $P_{i+1}^*P_{i+2}^*$. Лако се доказује да

$$\overrightarrow{A_1^*A_2^*} = 2\overrightarrow{Q_1^*Q_2^*} = -\overrightarrow{P_1^*P_2^*}.$$

    Такође, пошто су кругови $A_i^*A_{i+1}^*I$ истих полупречника, $P_1^*P_2^* \parallel B_1^*B_2^*$, па и $A_1^*A_2^* \parallel B_1^*B_2^*$. $\square$

11. Доказаћемо да пресечна тачка X правих PR и QS лежи на правој BC. Приметимо да се тачке P, Q, R, S налазе на кругу над пречником AT. Уочимо зато шест коцикличних тачака A, S, R, T, P, Q. Применом Паскалове теореме на ових шест тачака према схеми



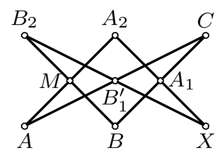
добијамо да су тачке B, C и $X = PR \cap QS$ колинеарне, што је требало доказати. $\square$

12. *Прво решење, коришћењем пројективних пресликавања:* Нека је $A_3 = AM \cap BC$ и $B_3 = BM \cap AC$. Нека је X друга пресечна тачка праве A_1A_2 са описаним кругом k троугла ABC. Нека је X' друга пресечна тачка праве B_1B_2 са кругом k. Уочимо низ перспективитета

$$ABCX \overset{A_2}{\barwedge} A_3BCA_1 \overset{M}{\barwedge} AB_3CB_1 \overset{B_2}{\barwedge} ABCX'$$

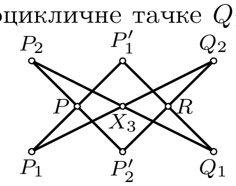
који има три фиксне тачке A, B, C, па је према томе идентичко пресликавање, те је и $X = X'$. Аналогно и права C_1C_2 садржи тачку X, па је тврђење задатка у потпуности доказано. $\square$

Друго решење, коришћењем Паскалове теореме: Нека права A_1A_2 сече описани круг троугла ABC у тачкама A_2 и X. Нека је $XB_2 \cap AC = B_1'$. Применимо Паскалову теорему на коцикличне тачке A, B, C, A_2, B_2, X по схеми



Следи да су тачке A_1, B_1', M колинеарне. Дакле, $B_1' \in A_1M$. Али по дефиницији тачке B_1' важи $B_1' \in AC$, па је $B_1' = A_1M \cap AC = B_1$. Закључујемо да су тачке X, B_1, B_2 колинеарне. Аналогно се доказује и да су тачке X, C_1, C_2 колинеарне, па се праве A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 заиста секу у тачки X која припада описаном кругу троугла ABC. $\square$

13. Познато је тврђење (погледати материјал на тему педалних троуглова) по коме педални троуглови који одговарају изогонално спрегнутим тачкама имају заједнички описани круг, тзв педални круг тачака P и Q. Центар тог круга, који је истовремено и средиште дужи PQ, означимо са R. Означимо још тачке $P_1' = PP_1 \cap Q_1R$ и $P_2' = PP_2 \cap Q_2R$ (тачке P_1' и P_2' припадају педалном кругу тачке P, као тачке дијаметрално супротне тачкама Q_1 и Q_2). Применом Паскалове теореме на коцикличне тачке Q_1, P_2, P_2', Q_2, P_1, P_1' према схеми



добијамо да су тачке P, R, X_1 колинеарне, односно $X_1 \in PQ$. Аналогно и тачке X_2, X_3 припадају правој PQ. $\square$

14. Подсетимо читаоца на тврђење према коме круг l остаје фиксиран при инверзији у односу на круг k ако и само ако је $l = k$ или $l \perp k$.

Пошто тачка M припада полари тачке A у односу на круг k, важи $\angle MA^*A = 90°$, где је $A^* = \psi_l(A)$. Зато $A^* \in l$, где је l круг над пречником AM. Аналогно $M^* \in l$. Међутим, из $A \in l$ следи $A^* \in l^*$, из $A^* \in l$ следи $A \in l^*$ (подсећамо читаоца да је инверзија инволуција, односно да је самој себи инверзно пресликавање, па је $\psi_l(A^*) = A$), и аналогно закључујемо да $M \in l^*$ и $M^* \in l^*$. Сада примећујемо да кругови l и l^* имају четири заједничке тачке A, A^*, M, M^*. Како већ три тачке једнозначно одређују круг, због тога је $l = l^*$, па према претходно поменутом тврђењу $l = k$ или $l \perp k$. Случај $l = k$ се може лако елиминисати, јер је круг l круг над пречником AM, па би AM било пречник и круга k. Међутим, такве тачке A и M не би биле међусобно конјуговане. Због тога преостаје једино случај $l \perp k$, што је требало доказати. $\square$

15. Нека је $J = KL \cap MN$, $R = l \cap MN$, $X_\infty = l \cap AM$. Како је MN полара тачке A, из $J \in MN$ следи $\mathcal{H}(K, L; J, A)$. Како је $KLJA \overset{M}{\underset{\overline{\wedge}}{}} PQRX_\infty$, важи и $\mathcal{H}(P, Q; R, X_\infty)$. Одавде следи да је R средиште дужи PQ. $\square$

16. Означимо са Q пресек правих AP и BC и са Q' тачку праве BC такву да је полуправа AQ' изогонално спрегнута полуправој AQ у троуглу ABC. Према дефиницији изогонално спрегнутих полуправих, $\angle Q'AC = \angle BAQ$ и $\angle BAQ' = \angle QAC$.

    За произвољну тачку X на дужи BC, применом синусне теореме на троуглове BAX и XAC добијамо

    $$\frac{BX}{XC} = \frac{BX}{AX}\frac{AX}{XC} = \frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle ABX}\frac{\sin\angle ACX}{\sin\angle XAC} = \frac{\sin\angle ACX}{\sin\angle ABX}\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC} = \frac{AB}{AC}\frac{\sin\angle BAX}{\sin\angle XAC}.$$

    Применом ове формуле на тачке $X = Q$ и $X = Q'$ и множењем добијамо

    $$\frac{BQ}{QC}\frac{BQ'}{Q'C} = \frac{AB}{AC}\frac{\sin\angle BAQ}{\sin\angle QAC}\frac{AB}{AC}\frac{\sin\angle BAQ'}{\sin\angle Q'AC} = \frac{AB^2}{AC^2}. \qquad (*)$$

    Дакле, уколико докажемо да је $BQ/QC = AB^2/AC^2$, одатле ће следити да је $BQ'/Q'C = 1$, односно да је Q' средиште BC а полуправа AQ изогонално спрегнута тежишној линији, чиме ће тврђење задатка бити доказано.

    Како тачка P припада поларама тачака B и C, то тачке B и C припадају полари тачке P, па закључујемо да је полара тачке P управо права BC. Уочимо тачку D која се добија у пресеку праве BC са тангентом на описани круг у тачки A. Како тачка D по дефиницији припада поларама тачака A и P, то је полара тачке D права AP. Одатле следи $\mathcal{H}(B, C; D, Q)$. Одредимо сада однос BD/DC: како су троуглови ABD и CAD слични, важи $BD/AD = AD/CD = AB/AC$. Одавде је $BD/CD = (BD/AD)(AD/CD) = AB^2/AC^2$. Због хармонијске спрегнутости $\mathcal{H}(B, C; D, Q)$ важи и $BQ/QC = BD/DC = AB^2/AC^2$, чиме је доказано тврђење задатка. $\square$

17. Тврђење задатка следи из Бријаншонове теореме примењене на шестоугао $APBMCN$. $\square$

18. Применом Бријаншонове теореме на шестоугао $AMBCPD$ добијамо да права MP садржи пресечну тачку правих AB и CD. Аналогно, применом Бријаншонове теореме на шестоугао $ABNCDQ$ добијамо да и права NQ садржи исту тачку. $\square$

19. Брокарова теорема тврди да је полара тачке $F = AD \cap BC$ права $f = EO$. Како је полара тачке на кругу тангента на круг у тој тачки, знамо да је $K = a \cap d$, где су a и d поларе тачака A и D. Самим тим је и $k = AD$. Како је $F \in AD = k$, важи и $K \in f$. Аналогно се доказује и да $L \in f$, па тачке E, O, K, L све леже на правој f. $\square$

20. Означимо $G = AD \cap BC$. Означимо круг описан око четвороугла $ABCD$ са k, а кругове описане око троуглова ADF и BCF са k_1 и k_2, респективно. Приметимо да је радикална оса кругова k и k_1 права AD, кругова k и k_2 права BC, кругова k_1 и k_2 права FH. Према познатој теореми, ове три радикалне осе се секу у једној тачки, која је управо тачка G. Другим речима, доказали смо да су тачке F, G, H колинеарне.

    Без умањења општости, претпоставимо да је распоред тачака $\mathcal{B}(G, F, H)$ (алтернативно, могу се у даљем доказу користити оријентисани углови). Користећи тетивне четвороуглове $ADFH$ и $BCFH$, добијамо $\angle DHF = \angle DAF = \angle DAC$ и $\angle FHC = \angle FBC = \angle DBC$, па је $\angle DHC = \angle DHF + \angle FHC = \angle DAC + \angle DBC = 2\angle DAC = \angle DOC$. Зато су тачке D, C, H и O коцикличне. Слично се доказује и да су тачке A, B, H, O коцикличне.

    Означимо са k_3 и k_4 кругове описане око четвороуглова $ABHO$ и $DCHO$, респективно. Приметимо да је радикална оса кругова k и k_3 права AB, кругова k и k_2 права CD, кругова k_3 и k_4 права OH. Радикалне осе ова три круга се секу у једној тачки, која је управо тачка E. Овим смо доказали да су тачке O, H, E колинеарне.

    Према Брокаровој теореми је $FH \perp OE$, што због $FH = GH$ и $OE = HE$ повлачи да је $GH \perp HE$, што је требало доказати. $\square$