Математичка гимназија

Матурски рад

Функције генератрисе

ученик
Милан Новаковић IVa

ментор
Владимир Балтић

Београд
јуни 2004.

Увод

Генератрисе су моћан алат за решавање многих проблема, углавном оних комбинаторне природе, али и не само таквих (што ће бити представљено у овом раду). На овим просторима генератрисе нису баш у ,,арсеналу" математичара који се баве овом проблематиком, за шта је делимично крива и чињеница да су оне нашле примену нешто касније и нису се развијале уз традиционалну комбинаторику. Циљ овог матурског рада је да презентује само неке примене генератриса, и то оне које се ослањају на знање које се може стећи у средњој школи. Надам се да ће овај рад учинити бар мало популарнијим саме генератрисе и њихову примену првенствено код ученика који се такмиче на математичким такмичењима.

На почетку је дат строги формални приступ генератрисама, тј. степеним редовима. У другим деловима књиге начин писања је више окренут решавању проблема него формалном теоријском писању. Разматрени су решавање рекурентних једначина, првог, другог и вишег реда, затим метод ,,змијског уља" који је врло моћан метод у решавању многих задатака, а затим су размотрене неке друге примене генератриса и дати су задаци чије би решавање било практично немогуће без генератриса.

Скуп природних бројева ћемо означавати са $\mathbb{N}$, а скуп ненегативних целих са $\mathbb{N}_0$. Суми чије су границе 0 и $+\infty$ често ћемо изостављати границе, тј. у сумама са изостављеним границама подразумевају се ове границе.

Теоријски увод

У раду са разним генераторним функцијама често се намеће потреба за разним трансформацијама и манипулацијама које не бисмо смели да извршимо ако бисмо генератрисе посматрали као аналитичке функције. Да би смо себи дали што веће могућности за манипулацију генератрисама, уводимо их као алгебарске објекте, чиме се бави *формална теорија степених редова.*

Дефиниција **1**. **Формални степени ред** је израз облика

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

Низ бројева $\{a_i\}_0^\infty$ зовемо **низом коефицијената**.

Напомена: Користићемо овде и друге изразе: ред, генератриса...

На пример, ред

$$A(x) = 1 + x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + n^n x^n + \ldots$$

конвергира само за $x = 0$ (у аналитичком облику) док је, у формалној теорији то добро дефинисан формални степени ред генерисан низом коефицијената $\{a_i\}_0^\infty, a_i = i^i$.

Напомена: Низове и чланове низа ћемо најчешће означавати малим словима (a, b, a_3 ...), док ћемо степене редове генерисаним тим низовима обележавати, ако није другачије наглашено, одговарајућим великим словима (A, B, ...).

Дефиниција **2**. За два реда $A = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ и $B = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ кажемо да су **једнака** акко су им низови коефицијената једнаки, тј. $a_i = b_i$ за свако $i \in \mathbb{N}_0$.

Напомена: Коефицијент уз члан x^n у степеном реду F ћемо обележавати са $[x^n]F$.

Можемо да дефинишемо и **збир** и **разлику** редова у смислу

$$\sum_n a_n x^n \pm \sum_n b_n x^n = \sum_n (a_n \pm b_n) x^n$$

док се **производ** дефинише са

$$\sum_n a_n x^n \sum_n b_n x^n = \sum_n c_n x^n, \qquad c_n = \sum_i a_i b_{n-i}$$

Такође уместо $F \cdot F$ пишемо F^2, и уопште $F^{n+1} = F \cdot F^n$. Видимо да је неутралан елемент за сабирање 0, а за множење 1. У складу са тим можемо дефинисати следећи појам:

Дефиниција **3**. Формални степени ред G је **реципрочан** формалном степеном реду F ако важи $FG = 1$.

Генератрису реципрочну генератриси F често ћемо обележавати са $1/F$. Због комутативности множења генератриса је $FG = 1$ еквивалентно са $GF = 1$ па су F и G **међусобно реципрочни**. По правилу производа је $(1-x)(1+x+x^2+\ldots) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}(1\cdot 1 - 1 \cdot 1)x^i = 1$, па су $(1-x)$ и $(1+x+x^2+\ldots)$ међусобно реципрочни.

Теорема 1. Формални степени ред $F = \sum_n a_n x^n$ има реципрочни формални степени ред акко $a_0 \neq 0$. При томе је тај реципрочни ред јединствено одређен.

Доказ: Нека F има реципрочан ред $1/F = \sum_n b_n x^n$. Тада је $F \cdot (1/F) = 1$ па је по правилу производа $1 = a_0 b_0$, па је $a_0 \neq 0$. Такође за $n \geqslant 1$ имамо $0 = \sum_k a_k b_{n-k}$ одакле је

$$b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_k a_k b_{n-k}$$

Овим су сви коефицијенти реципрочног реда једнозначно одређени.

Са друге стране, ако је $a_0 \neq 0$ тада можемо из претходних веза једнозначно одредити све коефицијенте b_i, што једнозначно одређује реципрочан ред $1/F$.

Из претходног се може закључити да скуп формалних степених редова заједно са аритметичким оперцијама које смо дефинисали на овај начин чини прстен у којима су инвертибилни елементи они редови који имају слободан члан различит од 0.

Ако је $F = \sum_n f_n x^n$ под ознаком $F(G(x))$ ћемо подразумевати $F(G(x)) = \sum_n f_n g(x)^n$. Такође, ову ознаку ћемо користити само ако је F полином (тј. има само коначан бројненултих коефицијената) или ако је слободан члан реда G једнак 0. У случају да је слободан члан реда G једнак 0, а F није полином, не можемо да одредимо одређени члан реда $F(G(x))$ у коначно много корака.

Дефиниција **4**. За формални степени ред G кажемо (ако постоји) да је **инверзан** (или **инверз**) формалном степеном реду F ако важи $F(G(x)) = G(F(x)) = x$.

И овде такође важи симетричност, ако је G инверз F, тада је и F инверз G, па су они међусобно инверзни.

Теорема 2. Нека су F и G међусобно инверзни редови. Тада је $F = f_1 x + f_2 x^2 + \ldots$ и $G = g_1 x + g_2 x^2 + \ldots$ и $f_1 g_1 \neq 0$.

Доказ: Да би уопште били дефинисана композиција F и G морају слободни чланови да буду 0. Даље, нека је $F = f_r x^r + \ldots$ и $G = g_s x^s + \ldots$. Дата је $F(G(x)) = x = f_r g_s^r x^{rs} + \ldots$, па је $rs = 1$ и $r = s = 1$.

Дефиниција **5**. Извод (првог реда) формалног степеног реда $F = \sum_n f_n x^n$ је $F' = \sum_n n f_n x^{n-1}$. Извод реда $n > 1$ се дефинише рекурзивно као $F^{(n+1)} = (F^{(n)})'$.

Теорема 3. Важе следеће особине извода:

- $(F+G)^{(n)} = F^{(n)} + G^{(n)}$
- $(FG)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F^{(i)} G^{(n-i)}$

Доказ се спроводи најједностанијим математичким апаратом и препуштен је читаоцу.

Дефиниција **6**. Ознака $A \overset{osr}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$ значи да је A обични степени ред који генерише низ $\{a_n\}_0^\infty$, тј. да је $A = \sum_n a_n x^n$.

Нека је $A \overset{osr}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^\infty$. Тада је

$$\sum_n a_{n+1} x^n = \frac{1}{x} \sum_{n>0} a_n x^n = \frac{A(x) - a_0}{x}$$

односно $\{a_{n+1}\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} \dfrac{A - a_0}{x}$. Слично је

$$\{a_{n+2}\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} \frac{(A - a_0)/x - a_1}{x} = \frac{A - a_0 - a_1 x}{x^2}$$

Теорема 4. Ако је $\{a_n\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} A$ тада је за $h > 0$

$$\{a_{n+h}\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} \frac{A - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}$$

Доказ: Индукцијом по h. За $h = 1$ је тврђење тачно, као што је показано раније. Индуктивни корак би се могао спровести на следећи начин. Нека тврђење важи за неко h. Тада је

$$\{a_{n+h+1}\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} \{a_{(n+h)+1}\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} \frac{\frac{A - a_0 - a_1 x - \ldots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h} - a_h}{x} \overset{osr}{\leftrightarrow} \frac{A - a_0 - a_1 x - \ldots - a_h x^h}{x^{h+1}}$$

чиме смо спровели и индуктивни корак.

Већ знамо да је $\{(n+1)a_{n+1}\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} A'$. Циљ нам је да добијемо низ $\{na_n\}_0^\infty$. То је управо низ xA'. Зато уводимо оператор xD на следећи начин:

Дефиниција **7**. Запис xDA је други запис xA' односно $x\frac{dA}{dx}$.

Следеће две теореме су тривијалне последице особина извода:

Теорема 5. Нека је $\{a_n\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} A$. Тада је $\{n^k a_n\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} (xD)^k A$

Теорема 6. Нека је $\{a_n\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} A$ и P полином. Тада је

$$P(xD)A \overset{osr}{\leftrightarrow} \{P(n)a_n\}_0^\infty$$

Размотримо шта представља генератриса $\dfrac{A}{1-x}$. Ово се на други начин може записати као $A\frac{1}{1-x}$. Како смо већ показали, реципрочан ред реду $1 - x$ је $1 + x + x^2 + \ldots$, тако да се правилом производа добија $\frac{A}{1-x} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + \ldots$.

Теорема 7. Ако је $\{a_n\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} A$ тада је

$$\frac{A}{1-x} \quad \overset{osr}{\leftrightarrow} \quad \left\{\sum_{j=0}^{n} a_j\right\}_{n\geqslant 0}$$

Сада ћемо увести нову врсту (или само облик) генераторних фунција.

Дефиниција **8**. Кажемо да је A **експоненцијална генераторна фукција** (и такође ред, степени ред, ...) низа $\{a_n\}_0^\infty$ акко је A обична генератриса низа $\{\frac{a_n}{n!}\}_0^\infty$, односно

$$A = \sum_n \frac{a_n}{n!}x^n$$

Ако је B експоненцијална генератриса низа $\{b_n\}_0^\infty$ тада пишемо и $\{b_n\}_0^\infty \overset{esr}{\leftrightarrow} B$.

Ако је $B \overset{esr}{\leftrightarrow} \{b_n\}_0^\infty$, интересује нас шта је B'. Лако се види да је

$$B' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nb_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_{n+1}x^n}{n!}$$

па је $B' \overset{esr}{\leftrightarrow} \{b_{n+1}\}_0^\infty$.

Теорема 8. Ако је $\{b_n\}_0^\infty \overset{esr}{\leftrightarrow} B$ тада је за $h \geqslant 0$

$$\{b_{n+h}\}_0^\infty \quad \overset{osr}{\leftrightarrow} \quad B^{(h)}$$

Такође важи еквивалентна теорема и за експоненцијалне генератрисе.

Теорема 9. Нека је $\{b_n\}_0^\infty \overset{esr}{\leftrightarrow} B$ и P полином. Тада је

$$P(xD)B \overset{esr}{\leftrightarrow} \{P(n)b_n\}_0^\infty$$

Експоненцијалне генератрисе су битне у комбинаторним идентитетима управо због следећег својства.

Теорема 10. Нека је $\{a_n\}_0^\infty \overset{esr}{\leftrightarrow} A$ и $\{b_n\}_0^\infty \overset{esr}{\leftrightarrow} B$. Тада генератриса AB генерише низ

$$\left\{\sum_k \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\right\}_{n=0}^\infty$$

Доказ: Имамо да је

$$AB = \left\{\sum_{i=0}^\infty \frac{a_i x^i}{i!}\right\}\left\{\sum_{j=0}^\infty \frac{b_j x^j}{j!}\right\} = \sum_{i,j\geqslant 0} \frac{a_i b_j}{i!j!} x^{i+j} = \sum_n x^n \left\{\sum_{i+j=n} \frac{a_i b_j}{i!j!}\right\},$$

односно

$$AB = \sum_n \frac{x^n}{n!}\left\{\sum_{i+j=n} \frac{n! a_i b_j}{i!j!}\right\} = \sum_n \frac{x^n}{n!} \sum_k \binom{n}{k} a_k b_{n-k},$$

што је и требало доказати.

Овим смо дефинисали неке основне појмове теорије функција генератриса. Неке битне особине као и нови појмови ће касније бити описани.

Иако смо дефинисали формалне степене редове као искључиво алгебарске објекте, нећемо се одрећи ни њихових аналитичких особина. У ту сврху ћемо користити добро познати *Тејлеров (Taylor) развој* функција у степене редове. Тако ћемо, на пример, функцију e^x третирати као формални ред који је добијен развојем функције у степени ред, односно e^x ћемо идентификовати са редом $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$. Користићемо и обрнути смер. Овде је дат развој неких најбитнијих функција у степене редове.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n$$

$$\ln\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$$

$$e^x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_k \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_n \binom{n+k}{n} x^n$$

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n x^n}{n!}$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x}) = \sum_n \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_n \binom{2n}{n}x^n$$

$$x \operatorname{ctg} x = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-4)^n B_{2n}}{(2k)!}x^{2n}$$

$$\operatorname{tg} x = \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n-1}\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}$$

$$\frac{x}{\sin x} = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n-1}\frac{(4^n-2)B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k = \sum_n \binom{2n+k}{n}x^n$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^k = \sum_{n\geqslant 0}\frac{k(2n+k-1)!}{n!(n+k)!}x^n$$

$$\arcsin x = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n-1)!!x^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$$

$$e^x \sin x = \sum_{n\geqslant 1}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n$$

$$\ln^2\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geqslant 2}\frac{H_{n-1}}{n}x^n$$

$$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{x}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{16^n\sqrt{2}(2n)!(2n+1)!}x^n$$

$$\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n n!^2}{(k+1)(2k+1)!}x^{2n}$$

Напомена: Овде је $H_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$, а B_n је n-ти Бернулијев (Bernoulli) број.

Рекурентне једначине

За почетак покушајмо да решимо најједноставнију рекурентну једначину.

Пример 1. Нека је низ a_n задат са $a_0 = 0$ и $a_{n+1} = 2a_n + 1$ за $n \geqslant 0$. Можемо да видимо да је првих неколико чланова 0, 1, 3, 7, 15, ... па нам се чини као да би решење могло бити $a_n = 2^n - 1$. Ово се може лако доказати индукцијом, али ми ћемо овај проблем решити генераторним функцијама.

Нека је $A(x)$ генератриса низа a_n, тј. нека је $A(x) = \sum_n a_n x^n$. Ако обе стране рекурентне везе помножимо са x^n и све саберемо, добијамо да је

$$\sum_n a_{n+1}x^n = \frac{A(x) - a_0}{x} = \frac{A(x)}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x} = \sum_n (2a_n + 1)x^n.$$

Одатле је лако

$$A(x) = \frac{x}{(1-x)(2-x)}$$

Али како сада да добијемо експлицитну формулу за чланове низа? Само диференцирање не би ишло лако, те стога можемо да покушамо да раставимо $A(x)$ на збир две генератрисе:

$$\frac{x}{(1-x)(2-x)} = x\left(\frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\right) = (2x + 2^2x^2 + \ldots) - (x + x^2 + \ldots).$$

Сада је очигледно $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)x^n$, па је решење рекурентне једначине заиста $a_n = 2^n - 1$.

Пример 2. Мало тежа је, рецимо, следећа рекурентна једначина:

$$a_{n+1} = 2a_n + n, \quad (n \geqslant 0)$$

и $a_0 = 1$. Нека је $\{a_n\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} A$. Тада је $\{a_{n+1}\}_0^\infty \overset{osr}{\leftrightarrow} \frac{A-1}{x}$. Имамо такође да је $xD\frac{1}{1-x} \overset{osr}{\leftrightarrow} \{n \cdot 1\}$. Пошто је $xD\frac{1}{1-x} = x\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$ то се рекурентна веза претвара у

$$\frac{A-1}{x} = 2A + \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Одатле је лако

$$A = \frac{1 - 2x + 2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}$$

Овиме смо ми решили генератрису, тј. "решили" смо чланове низа. Ако бисмо требали да докажемо да је овај низ једнак неком другом, довољно би било да покажемо да су генератрисе једнаке. Међутим, ми требамо да нађемо чланове експлицитно. Покушајмо да опет представимо A у виду

$$\frac{1 - 2x + 2x^2}{(1-x)^2(1-2x)} = \frac{P}{(1-x)^2} + \frac{Q}{1-x} + \frac{R}{1-2x}.$$

Можемо да помножимо обе стране са $(1-x)^2(1-2x)$ чиме бисмо добили

$$1 - 2x + 2x^2 = P(1-2x) + Q(1-x)(1-2x) + R(1-x)^2,$$

односно
$$1-2x+2x^2 = x^2(2Q+R)+x(-2P-3Q-2R)+(P+Q+R),$$
одакле се добија $P=-1$, $Q=0$ и $R=2$.
Могли смо и лакше да добијемо P, Q и R. Ако помножимо обе стране са $(1-x)^2$ и ставимо $x=1$ добијамо да је $P=-1$. Такође, ако помножимо све са $1-2x$ и уврстимо $x=\frac{1}{2}$ добијамо да је $R=2$. Такође, ако уврстимо P и R и ставимо $x=0$ добијамо $Q=0$.
Дакле, имамо да је
$$A = \frac{-1}{(1-x)^2}+\frac{2}{1-2x}$$
Пошто је $\frac{2}{1-2x} \overset{osr}{\leftrightarrow} \{2^{n+1}\}$ и како је $\frac{1}{(1-x)^2} = D\frac{1}{1-x} \overset{osr}{\leftrightarrow} \{n+1\}$, то је $a_n = 2^{n+1}-n-1$.

У претходна два примера смо имали да члан низа зависи само од претходног члана. Генератрисе можемо да искористимо и за решавање диференцних једначина чији су редови већи од 1.

Пример 3. Добро је познат пример *Фибоначијевог (Fibonacci)* низа, задатог са $F_0=0$, $F_1=1$ и за $n \geqslant 1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$. Нека је F генератриса низа $\{F_n\}$. Ако помножимо обе стране са x^n и саберемо, са леве стране имамо $\{F_{n+1}\} \overset{osr}{\leftrightarrow} \frac{F-x}{x}$, а са десне $F+xF$. Одатле добијамо да је
$$F = \frac{x}{1-x-x^2}.$$
Треба још да развијемо овај израз у степени ред. Желимо да израз представимо као збир одговарајућих разломака. Нека је
$$-x^2-x+1 = (1-\alpha x)(1-\beta x)$$
Тада је $\alpha=(1+\sqrt{5})/2$, $\beta=(1-\sqrt{5})/2$ и $\alpha-\beta=\sqrt{5}$. Даље је
$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{x}{(1-x\alpha)(1-x\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{1-x\alpha}-\frac{1}{1-x\beta}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty}\beta^n x^n\right\}.$$
Једноставно се добија
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n.)$$
Такође одавде одмах можемо да добијемо и апроксимативну формулу за F_n. Пошто је $|\beta|<1$ то је $\lim\limits_{n\to\infty}\beta^n=0$ и одатле је
$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Сада размотримо случај када имамо низ две променљиве. И такве проблеме можемо решити генератрисама.

Пример 4. Рецимо да желимо да нађемо број k-елементних подскупова n-елементног скупа. Знамо да је резултат $\binom{n}{k}$, али желимо да тај резултат добијемо помоћу генератриса. Нека је тражени број $c(n,k)$. Можемо видети да је број k-елементних подскупова једнак броју $k-1$-елементних подскупова уколико на њих ”додамо” неки фиксиран елемент који није међу њима (а таквих подскупова онда има $c(n-1,k-1)$ и броју k-елементних подскупова од преосталих $n-1$ елемената (у том случају тај фиксиран елемент не припада подскуповима). Одатле се добија
$$c(n,k) = c(n-1,k)+c(n-1,k-1)$$

Такође је и $c(n,0)=1$. Сада дефинишимо генератрису низа $c(n,k)$ за неко фиксирано n. Нека је дакле

$$C_n(x)=\sum_k c(n,k)x^k$$

Ако сада рекурентну везу помножимо са x^k и саберемо за све $k\geqslant 1$, добијамо

$$C_n(x)-1=(C_{n-1}(x)-1)+xC_{n-1}(x)$$

за $n\geqslant 0$ и такође $C_0(x)=1$. Одатле се добија, за $n\geqslant 1$

$$C_n(x)=(1+x)C_{n-1}(x)$$

Сада је коначно $C_n(x)=(1+x)^n$. Дакле, $c(n,k)$ је коефицијент уз x^k у развоју $(1+x)^n$, а то је управо $\binom{n}{k}$. Можда неко помисли да смо варали и искористили готов резултат за биномне коефицијенте који је добијен рецимо обичним комбинаторним методом. Али исти резултат се може добити и развојем у Тејлеров ред, па се и на тај начим може добити $c(n,k)=\binom{n}{k}$.

Можемо рецимо да направимо и генератрису низа $C_n(x)$:

$$\sum_n C_n(x)y^n=\sum_n\sum_k\binom{n}{k}x^ky^n=\sum_n(1+x)^ny^n=\frac{1}{1-y(1+x)}$$

Тако имамо да је $\binom{n}{k}=[x^ky^n](1-y(1+x))^{-1}$. Можемо сада да израчунамо и збир $\displaystyle\sum_n\binom{n}{k}y^n$.

$$[x^k]\sum_n\sum_k\binom{n}{k}x^ky^n=[x^k]\frac{1}{1-y(1+x)}=$$

$$=\frac{1}{1-y}[x^k]\frac{1}{1-\frac{y}{1-y}x}=$$

$$=\frac{1}{1-y}\left(\frac{y}{1-y}\right)^k=\frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}$$

Дакле имамо идентитете

$$\sum_k\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n;\qquad \sum_n\binom{n}{k}y^n=\frac{y^k}{(1-y)^{k+1}}$$

Напомена: За $n<k$ је $\displaystyle\binom{n}{k}=0$.

Пример 5. Покушајмо да решимо следећу рекурентну једначину:

$$a_{n+3}=6a_{n+2}-11a_{n+1}+6a_n\quad n\geqslant 0$$

са почетним условима $a_0=2$, $a_1=0$, $a_2=-2$.
Ако је A генератриса одговарајућег низа, ово можемо записати у облику:

$$\frac{A-2-0\cdot x-(-2)x^2}{x^3}=6\frac{A-2-0\cdot x}{x^2}-11\frac{A-2}{x}+6A,$$

одакле се лако добија

$$A=\frac{20x^2-12x+2}{1-6x+11x^2-6x^3}=\frac{20x^2-12x+2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}.$$

Желимо да нађемо реалне коефицијенте B, C и D тако да важи

$$\frac{20x^2-12x+2}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}=\frac{B}{1-x}+\frac{C}{1-2x}+\frac{D}{1-3x}.$$

Можемо применити већ познати трик: Помножимо обе стране са $(1-x)$ и ставимо $x=1$ добијамо $B=\frac{20-12+2}{(-1)\cdot(-2)}=5$. Помножимо све са $(1-2x)$ и ставимо $x=1/2$. Тако добијамо да је $C=\frac{5-6+2}{-\frac{1}{4}}=-4$. Ако сада уврстимо вредности за B и C и ставимо $x=0$ добијамо $B+C+D=2$ одакле је $D=1$. Сада коначно имамо

$$A=\frac{5}{1-x}-\frac{4}{1-2x}+\frac{1}{1-3x}=\sum_{n=0}^{\infty}(5-4\cdot 2^n+3^n)x^n$$

одакле је $a_n=5-2^{n+2}+3^n$.

Може се десити да не можемо тако једноставно да добијемо експлицитан израз за чланове низа, као у следећем примеру.

Пример 6. Нека је низ задат са $a_0=0$, $a_1=2$ и за $n\leqslant 0$ рекурентно

$$a_{n+2}=-4a_{n+1}-8a_n$$

Нека је A функција генератрисе низа. Тада рекурентну везу можемо записати у облику

$$\frac{A-0-2x}{x^2}=-4\frac{A-0}{x}-8A$$

одакле је

$$A=\frac{2x}{1+4x+8x^2}$$

Желели бисмо да овај израз опет раставиму о облику збира два једнставнија, за које знамо генераторне функције. Међути, корени $r_1=-2+2i$ и $r_2=-2-2i$једначине x^2+4x+8 су комплексни. Али то нас не спречава да и даље поступамо на исти начин као и раније. Треба да нађемо B и C тако да је

$$\frac{2x}{1+4x+8x^2}=\frac{B}{1-r_1x}+\frac{C}{1-r_2x}.$$

Примењујући већ научен трик можемо да добијемо да је $B=\frac{-i}{2}$ и $C=\frac{i}{2}$.

Да ли сте пажљиво читали? Зашто смо посматрали корене полинома x^2+4x+8 када је именилац у генератриси A заправо $8x^2+4x+1$?! Па ако бисмо посматрали корене полинома који је заиста у имениоцу добили бисмо разломке облика $\frac{B}{r_1-x}$ што бисмо мало теже развили у ред. Али зато можемо да именилац напишемо у облику $x^2(8+4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})$ и ово посматрамо као полином по $\frac{1}{x}$! Тада је именилац $x^2\left(\frac{1}{x}-r_1\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-r_2\right)$.

Можемо да наставимо са решавањем нашег задатка. Добили смо

$$A=\frac{-i/2}{1-(-2+2i)x}+\frac{i/2}{1-(-2-2i)x}.$$

Одавде је

$$A=\frac{-i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2+2i)^nx^n+\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-2-2i)^nx^n,$$

одакле је

$$a_n=\frac{-i}{2}(-2+2i)^n+\frac{i}{2}(-2-2i)^n.$$

Али чланови низа су реални, а не комплексни бројеви! Можемо мало да средимо израз за a_n. Пошто је

$$-2 \pm 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{\pm 3\pi i}{4}},$$

то је сада

$$a_n = \frac{i}{2}(2\sqrt{2})^n \left((\cos\frac{3n\pi}{4} - i\sin\frac{3n\pi}{4}) - (\cos\frac{3n\pi}{4} + i\sin\frac{3n\pi}{4}) \right),$$

па је $a_n = (2\sqrt{2})^n \sin\frac{3n\pi}{4}$. Другачије написано, ово је

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 8k \\ (2\sqrt{2})^n, & n = 8k+6 \\ -(2\sqrt{2})^n, & n = 8k+2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^n, & n = 8k+1 \text{ или } n = 8k+3 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^n, & n = 8k+5 \text{ или } n = 8k+7 \end{cases}.$$

Пример 7. Сада ћемо решити једну сложенију рекурентну једначину задату са

$$x_0 = x_1 = 0, \qquad x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 2^n + n \quad \text{за } n \geqslant 0.$$

Нека је $X(t)$ генератриса нашег низа. Ако смо већ довољно савладали рад са разним генератрисама одмах ћемо уочити да важи

$$\frac{X}{t^2} - 6\frac{X}{t} + 9X = \frac{1}{1-2t} + \frac{t}{(1-t)^2}.$$

Сређујући овај израз добијамо да је

$$X(t) = \frac{t^2 - t^3 - t^4}{(1-t)^2(1-2t)(1-3t)^2},$$

одакле добијамо да је

$$X(t) = \frac{1}{4(1-x)^2} + \frac{1}{1-2x} - \frac{5}{3(1-3x)} + \frac{5}{12(1-3x)^2}.$$

Првом сабирку одговар низ $\frac{n+1}{4}$, другом 2^n, трећем $5 \cdot 3^{n-1}$, а последњем $\frac{5(n+1)3^{n+1}}{12}$, што све укупно даје

$$x_n = \frac{2^{n+2} + n + 1 + 5(n-3)3^{n-1}}{4}.$$

Пример 8. Дефинишимо низ на следећи начин: Нека је $f_1 = 1$, $f_{2n} = f_n$ и $f_{2n+1} = f_n + f_{n+1}$. Видимо да је низ добро дефинисан, јер је сваки члан одређен преко неких претходних, и то на јединствен начин. Нека је функција генератрисе задата са

$$F(x) = \sum_{n \geqslant 1} f_n x^{n-1}.$$

Помножимо прву везу са x^{2n-1} а другу са x^{2n}. Када саберемо све једнакости које имамо добијамо

$$f_1 + \sum_{n\geqslant 1} f_{2n}x^{2n-1} + \sum_{n\geqslant 1} f_{2n+1}x^{2n} = 1 + \sum_{n\geqslant 1} f_n x^{2n-1} + \sum_{n\geqslant 1} f_n x^{2n} + \sum_{n\geqslant 1} f_{n+1}x^{2n}$$

односно

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n x^{n-1} = 1 + \sum_{n\geqslant 1} f_n x^{2n-1} + \sum_{n\geqslant 1} f_n x^{2n} + \sum_{n\geqslant 1} f_{n+1}x^{2n}$$

Занимљиво је да ово управо значи да важи $F(x) = x^2F(x^2) + xF(x^2) + F(x^2)$ тј.

$$F(x) = (1 + x + x^2)F(x^2)$$

У ствари важи

$$F(x) = \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^i} + x^{2^{i+1}}\right).$$

Може се показати да овако дефинисан низ има занимљиво својство. За сваки број n спроведимо следећи поступак: Представимо број n у бинарном систему, одбацимо задњи "блок" нула (ако их има на крају уопште), а остале цифре поделимо на што мање "блокова" узастопних цифара тако да сваки блок садржи само једнаке цифре. Ако су за два броја m и n скупови блокова једнаки, онда важи $f_m = f_n$. Нпр. бинарни запис броја 22 у бинарном систему је 10110 па је скуп одговарајућих блокова $\{1, 0, 11\}$, док је број 13 записан као 1101 и има исти скуп блокова $\{11, 0, 1\}$, па важи $f(22) = f(13)$. Провером се такође добија $f(22) = f(13) = 5$.

Из последње формуле се може закључити да је f_n у ствари број представљања броја n као збир потенција двојке који се налазе у паровима $\{1, 2\}$, $\{2, 4\}$, $\{4, 8\}$,... тако да два броја нису истовремено узета из истог пара.

Метод змијског уља

Метод змијског уља је врло корисна алатка у рачунању разних, често гломазних, комбинаторних сума, као и у доказивању комбинаторних идентитета. Само име можда делује чудно, али једно објашњење за тако чудно име може бити то да је метод настао у Америци где се змијско уље сматра универзалним леком америчких индијанаца.

С обзиром да метод змијског уља служи за рачунање разних сума, јасно је да он није универзалан и да је мало вероватно да исти и постоји. Међутим, велика класа проблема се може решити тим методом, односно поступком који је овде неформално изложен.

Нека је потребно израчунати суму S. Прво је потребно идентификовати слободну промењљиву од које зависи сума S. Нека је то рецимо n и нека S има вредност $f(n)$. Затим треба формирати $F(x)$, функцију генератрисе низа $f(n)$. Помножимо суму S са x^n и сумирајмо по n. У овом тренутку имамо (бар) дуплу суму, спољашњу по n и унутрашњу по S. Затим се обично замени редослед сумирања и одреди се вредност унутрашње суме по n. Тиме добијамо одређене коефицијенте у функцији генератрисе, који у ствари представљају вредност суме S у зависности од n.

У решавању оваквог типа задатака постоје неке карактеристичне суме које се често појављују. Овде ћемо дати преглед неких сума које се чешће користе.

Од раније је познат идентитет за $\sum_n \binom{m}{n} x^n$:

$$(1+x)^m = \sum_n \binom{m}{n} x^n.$$

Некад је потребно и $\sum_n \binom{n}{k} x^n$ што већ имамо у таблици генератриса:

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_n \binom{n+k}{k} x^n.$$

Такође, често се јављају и сличне суме у којима су само парни (односно непарне) индекси. Рецимо, имамо да је $(1+x)^m = \sum_n \binom{m}{n} x^n$, па је и $(1-x)^m = \sum_n \binom{m}{n} (-x)^n$. Сабирањем, односно одузимањем, добија се

$$\sum_n \binom{m}{2n} x^{2n} = \frac{((1+x)^m + (1-x)^m)}{2},$$

односно

$$\sum_n \binom{m}{2n+1} x^{2n+1} = \frac{((1+x)^m - (1-x)^m)}{2}.$$

Слично се добијају и следећи корисни идентитети:

$$\sum_n \binom{2n}{m} x^{2n} = \frac{x^m}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} + \frac{(-1)^m}{(1-x)^{m+1}} \right),$$

као и

$$\sum_n \binom{2n+1}{m} x^{2n+1} = \frac{x^m}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{m+1}} - \frac{(-1)^m}{(1-x)^{m+1}} \right).$$

Често је користан и идентитет

$$\sum_n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x}).$$

Пример 1. За почетак пробајмо да израчунамо колико је

$$\sum_k \binom{k}{n-k}.$$

Нека је n слободна променљива и означимо ову суму са

$$f(n) = \sum_k \binom{k}{n-k}.$$

Нека је и $F(x)$ генератриса низа $f(n)$, тј.

$$F(x) = \sum_n x^n f(n) = \sum_n x^n \sum_k \binom{k}{n-k} = \sum_n \sum_k \binom{k}{n-k} x^n.$$

Ово можемо да напишемо и као

$$F(x) = \sum_k \sum_n \binom{k}{n-k} x^n = \sum_k x^k \sum_n \binom{k}{n-k} x^{n-k},$$

што ће дати

$$F(x) = \sum_k x^k (1+x)^k = \sum_k (x+x^2)^k = \frac{1}{1-(x-x^2)} = \frac{1}{1-x-x^2}.$$

Ако се присетимо, ово је врло слично генератриси Фибоначијевог низа, у ствари $f(n) = F_{n+1}$ тако да смо овим добили да је

$$\sum_k \binom{k}{n-k} = F_{n+1}.$$

Пример 2. Рецимо да треба да израчунамо колико је

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}.$$

Ако је n фиксиран број, тада је m слободна променљива и од ње зависи сума. Нека је $f(m) = \sum\limits_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m}$ и нека је $F(x)$ генератриса низа $f(m)$, тј. $F(x) = \sum_m f(m) x^m$. Тада је

$$F(x) = \sum_m f(m) x^m = \sum_m x^m \sum_{k=m}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{m} =$$

$$= \sum_{k \leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} \sum_{m \leqslant k} \binom{k}{m} x^m = \sum_{k \leqslant n} \binom{n}{k} (1+x)^k$$

Овде смо искористили да је по Биномној теореми $\sum_{m \leqslant k} \binom{k}{m} x^m = (1+x)^k$. Даље је

$$F(x) = (-1)^n \sum_{k \leqslant n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (1+x)^k = (-1)^n \Big((1+x) - 1 \Big)^n = (-1)^n x^n$$

Дакле, добили смо да је $F(x) = (-1)^n x^n$, а пошто је то генератриса низа $f(m)$, то је

$$f(m) = \begin{cases} (-1)^n, & n = m \\ 0, & m < n \end{cases}.$$

Пример 3. Израчунајмо сада $\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$. Нека је $f(m)=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}$ и $F(x)=\sum_{m}x^m f(m)$. Тада је

$$F(x)=\sum_m x^m f(m)=\sum_m x^m\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\sum_{k\leqslant n}\binom{n}{k}\sum_{m\leqslant k}\binom{k}{m}x^m=\sum_{k\leqslant n}\binom{n}{k}(1+x)^k,$$

одакле је $F(x)=(2+x)^n$. Пошто је

$$(2+x)^n=\sum_m\binom{n}{m}2^{n-m}x^m,$$

вредност тражене суме је $f(m)=\binom{n}{m}2^{n-m}$.

Пример 4. Пробајмо да срачунамо

$$\sum_k\binom{n}{\left[\frac{k}{2}\right]}x^k.$$

Ово можемо да поделимо у две суме

$$\sum_k\binom{n}{\left[\frac{k}{2}\right]}x^k=\sum_{k=2k_1}\binom{n}{\left[\frac{2k_1}{2}\right]}x^{2k_1}+\sum_{k=2k_2+1}\binom{n}{\left[\frac{2k_2+1}{2}\right]}x^{2k_2+1}=$$

$$=\sum_{k_1}\binom{n}{k_1}(x^2)^{k_1}+x\sum_{k_2}\binom{n}{k_2}(x^2)^{k_2}=(1+x^2)^n+x(1+x^2)^n,$$

односно

$$\sum_k\binom{n}{\left[\frac{k}{2}\right]}x^k=(1+x)(1+x^2)^n.$$

Пример 5. Посматрајмо сада низ

$$f(m)=\sum_k\binom{n}{k}\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}y^k$$

као и функцију генератрисе $F(x)=\sum_m x^m f(m)$. Имамо

$$F(x)=\sum_m x^m\sum_k\binom{n}{k}\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}y^k=\sum_k\binom{n}{k}y^k\sum_m\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}x^m=$$

$$=\sum_k\binom{n}{k}y^kx^k\sum_m\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}x^{m-k}=\sum_k\binom{n}{k}y^kx^k(1+x)(1+x^2)^{n-k}.$$

Тако да је

$$F(x)=(1+x)\sum_k\binom{n}{k}(1+x^2)^{n-k}(xy)^k=(1+x)(1+x^2+xy)^n.$$

За $y=2$ имамо да је $F(x)=(1+x)^{2n+1}$, па је $F(x)$ генератриса низа $\binom{2n+1}{m}$ чиме добијамо комбинаторни идентитет

$$\sum_k\binom{n}{k}\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}2^k=\binom{2n+1}{m}.$$

Ако узмемо $y = -2$ добијамо да је $F(x) = (1+x)(1-x)^{2n} = (1-x)^{2n} + x(1-x)^{2n}$ па је коефицијент уз x^m једнак $\binom{2n}{m}(-1)^m + \binom{2n}{m-1}(-1)^{m-1} = (-1)^m \left[\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1}\right]$ чиме добијамо идентитет

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{n-k}{\left[\frac{m-k}{2}\right]}(-2)^k = (-1)^m \left[\binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-1}\right].$$

Пример 6. Докажимо да је за свако $n \geqslant 0$

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j} x^k = \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j}.$$

Ако узмемо да је n фиксирано, а j слободна променљива и $f(j) = \sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j} x^k$, $g(j) = \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j}$, тада су одговарајуће генератрисе

$$F(y) = \sum_j y^j f(j), \qquad G(y) = \sum_j y^j g(j).$$

Треба доказати да је $F(y) = G(y)$. Имамо да је

$$F(y) = \sum_j y^j \sum_k \binom{n}{k}\binom{k}{j} x^k = \sum_k \binom{n}{k} x^k \sum_j \binom{k}{j} y^j = \sum_k \binom{n}{k} x^k (1+y)^k,$$

одакле је $F(y) = (1+x+xy)^n$. Са друге стране је

$$G(y) = \sum_j y^j \binom{n}{j} x^j (1+x)^{n-j} = \sum_j \binom{n}{j} (1+x)^{n-j} (xy)^j = (1+x+xy)^n,$$

па је очигледно $F(y) = G(y)$, чиме смо доказали тражени комбинаторни идентитет.

Права моћ генератриса може се видети у следећем примеру.

Пример 7. Срачунајмо суму

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

за неке $m, n \geqslant 0$.
С обзиром да тражена сума има доста променљивих, елементарне комбинаторне методе не нуде ефикасан поступак којим би се овакве суме решиле са тако мало труда и размишљања као што нам нуди метод змијског уља.
С обзиром да се n појављује само на једном месту у суми, логично је да суму посматрамо као функцију по n. Нека је $F(x)$ генератриса низа таквих функција. Тада је

$$F(x) = \sum_n x^n \sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \sum_n \binom{n+k}{m+2k} x^{n+k} =$$

$$= \sum_k \binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} x^{-k} \frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}} = \frac{x^{m+2k}}{(1-x)^{m+2k+1}} \sum_k \binom{2k}{k}\frac{1}{k+1}\left\{\frac{-x}{(1-x)^2}\right\}^k =$$

$$= \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left\{1 - \sqrt{1 + \frac{4x}{(1-x)^2}}\right\} = \frac{-x^{m-1}}{2(1-x)^{m-1}}\left\{1 - \frac{1+x}{1-x}\right\} = \frac{x^m}{(1-x)^m}.$$

Ово је генератриса низа $\binom{n-1}{m-1}$ па је тиме доказано да је

$$\sum_k \binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \binom{n-1}{m-1}.$$

Пример 8. Докажимо следећи идентитет

$$\sum_k \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n} = \binom{2m+1}{2n}.$$

Нека су $F(x) = \sum_m x^m \sum_k \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n}$ и $G(x) = \sum_m x^m \binom{2m+1}{2n}$ генератрисе низова левих и десних страна једнакости. Доказаћемо $F(x) = G(x)$. Редом је

$$F(x) = \sum_m x^m \sum_k \binom{2n+1}{k}\binom{m+k}{2n} = \sum_k \binom{2n+1}{2k}\sum_m \binom{m+k}{2n} =$$

$$= \sum_k \binom{2n+1}{2k}\sum_m \binom{m+k}{2n}x^m = \sum_k \binom{2n+1}{2k}x^{-k}\sum_m \binom{m+k}{2n}x^{m+k} =$$

$$= \sum_k \binom{2n+1}{2k}x^{-k}\frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}} = \frac{x^{2n}}{(1-x)^{2n+1}}\sum_k \binom{2n+1}{2k}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{2k}.$$

Већ знамо да је $\sum_k \binom{2n+1}{2k}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{2k} = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2n+1} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{2n+1}\right)$ па је

$$F(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{2n-1}\left(\frac{1}{(1-\sqrt{x})^{2n+1}} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^{2n+1}}\right).$$

С друге стране је

$$G(x) = \sum_m \binom{2m+1}{2n}x^m = \left(x^{-1/2}\right)\sum_m \binom{2m+1}{2n}\left(x^{1/2}\right)^{2m+1},$$

па је

$$G(x) = \left(x^{-1/2}\right)\left[\frac{(x^{1/2})^{2n}}{2}\left(\frac{1}{(1-x^{1/2})^{2n+1}} - (-1)^{2n}\frac{1}{(1+x^{1/2})^{2n+1}}\right)\right],$$

односно

$$G(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})^{2n-1}\left(\frac{1}{(1-\sqrt{x})^{2n+1}} - \frac{1}{(1+\sqrt{x})^{2n+1}}\right).$$

чиме је доказ завршен.

Пример 9. На сличан начин се може решити и познати идентитет који се налазио на корицама још познатије књиге П. Младеновића "Комбинаторика" из које се припремала чак и бугарска екипа за ИМО 2003 у Јапану где је у екипном пласману освојила прво место :). Идентитет који треба доказати је

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}.$$

Нека је n слободна променљива и генератрисе левих и десних страна $F(x)$ и $G(x)$. Потребно је доказати једнакост ових генератриса. Прво је

$$F(x)=\sum_n x^n\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-2k}=\sum_{0\leqslant k}\binom{2k}{k}2^{-2k}\sum_n\binom{2n}{2k}x^n2^{2n},$$

$$F(x)=\sum_{0\leqslant k}\binom{2k}{k}2^{-2k}\sum_n\binom{2n}{2k}(2\sqrt{x})^{2n}.$$

Сада искористимо формулу за збир само парних потенција и добијамо

$$\sum_n\binom{2n}{2k}(2\sqrt{x})^{2n}=\frac{1}{2}(2\sqrt{x})^{2k}\left(\frac{1}{(1-2\sqrt{x})^{2k+1}}+\frac{1}{(1+2\sqrt{x})^{2k+1}}\right),$$

одакле је даље

$$F(x)=\frac{1}{2(1-2\sqrt{x})}\sum_k\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{(1-2\sqrt{x})^2}\right)^k+\frac{1}{2(1+2\sqrt{x})}\sum_k\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{(1+2\sqrt{x})^2}\right)^k.$$

С обзиром да је $\displaystyle\sum_n\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ то је

$$F(x)=\frac{1}{2(1-2\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4\frac{x}{(1-2\sqrt{x})^2}}}+\frac{1}{2(1+2\sqrt{x})}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4\frac{x}{(1+2\sqrt{x})^2}}},$$

одакле је

$$F(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-4\sqrt{x}}}+\frac{1}{2\sqrt{1+4\sqrt{x}}}.$$

С друге стране желимо да за $G(x)$ добијемо збир $\displaystyle\sum_n\binom{4n}{2n}x^n$. Пошто је $\displaystyle\sum_n\binom{2n}{n}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ то је $\displaystyle\sum_n\binom{2n}{n}(-x)^n=\frac{1}{\sqrt{1+4x}}$ па је

$$G(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt{1+4\sqrt{x}}}\right).$$

па је $F(x)=G(x)$.

Следећи пример је мало тежи, јер стандардна идеја змијског уља не води до решења.

Пример 1. (Моријати) За дате n и p израчунати

$$\sum_k\binom{2n+1}{2p+2k+1}\binom{p+k}{k}.$$

Због лакшег записа нека је $r=p+k$. Ако узмемо да је n слободна променљива, тада је тражена сума

$$f(n)=\sum_r\binom{2n+1}{2r+1}\binom{r}{p}.$$

Узмимо да је функција генератрисе $F(x)=\displaystyle\sum_n x^{2n+1}f(n)$! Ово је на неки начин и природно, с обзиром да нам се у биномном коефицијенту појављује баш $2n+1$. Сада је

$$F(x)=\sum_n x^{2n+1}\sum_r\binom{2n+1}{2r+1}\binom{r}{p}=\sum_r\binom{r}{p}\sum_n\binom{2n+1}{2r+1}x^{2n+1}.$$

С обзиром да је

$$\sum_n \binom{2n+1}{2r+1} x^{2n+1} = \frac{x^{2r+1}}{2} \left(\frac{1}{(1-x)^{2r+2}} + \frac{1}{(1+x)^{2r+2}} \right),$$

то је

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(1-x)^2} \sum_r \binom{r}{p} \left(\frac{x^2}{(1-x)^2} \right)^r + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(1+x)^2} \sum_r \binom{r}{p} \left(\frac{x^2}{(1+x)^2} \right)^r,$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{(1-x)^2} \frac{\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^p}{\left(1 - \frac{x^2}{(1-x)^2}\right)^{p+1}} + \frac{1}{2} \frac{x}{(1+x)^2} \frac{\left(\frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^p}{\left(1 - \frac{x^2}{(1+x)^2}\right)^{p+1}},$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{x^{2p+1}}{(1-2x)^{p+1}} + \frac{1}{2} \frac{x^{2p+1}}{(1+2x)^{p+1}} = \frac{x^{2p+1}}{2}((1+2x)^{-p-1} + (1-2x)^{-p-1}),$$

одакле је

$$f(n) = \frac{1}{2} \left(\binom{-p-1}{2n-2p} 2^{2n-2p} + \binom{-p-1}{2n-2p} 2^{2n-2p} \right),$$

што након сређивања даје

$$f(n) = \binom{2n-p}{2n-2p} 2^{2n-2p}.$$

Можемо да приметимо да за већину задатака овде нисмо пуно одступали од овог метода и користили смо свега неколико идентита, што представља врло битну особину овог метода која се може употребити и за писање компјутерских програма (тј. алгоритама) који решавају симболички велику класу сума у којима се јављају биномни коефицијенти.

Разни задаци

У овом поглављу ће бити изложене кроз задатке још неке примене генератриса.

Задатак 1: Доказати да за низ *Фибоначијевих (Fibonacci)* бројева важи

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} + 1$$

Решење: Ово је лака примена генератриса. Генератриса збира првих n чланова низа, тј. леве стране је по теореми 7. из 2. поглавља $F/(1-x)$, где је $F = x/(1-x-x^2)$ генератриса Фибоначијевих бројева. Са десне стране је

$$\frac{F-x}{x} - \frac{1}{1-x},$$

па након тривијалних рачунских операција закључујемо да такав идентитет заиста важи.

Задатак 2: Доказати да је за сваки природан број n број његових партиција на непарне делове једнак броју његових партиција на различите делове.

Решење: Генератриса броја непарних партиција природних бројева је

$$(1+x+x^2+\ldots)\cdot(1+x^3+x^6+\ldots)\cdot(1+x^5+x^{10}+\ldots)\ldots = \prod_{k\geqslant 1}\frac{1}{1-x^{2k+1}}.$$

Ово можемо видети тако што сваком партицији у коме се број i појављује a_i пута одговара тачно један члан са кофецијентом 1 у овом производу и то је $x^{1\cdot a_1+3\cdot a_3+5\cdot a_5+\cdots}$.
Генератриса броја партиција на различите делове је

$$(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^3)\ldots = \prod_{k\geqslant 1}(1+x^k),$$

јер из сваке заграде можемо да узмемо или да не узмемо потенцију x-а, а то одговара узимању или неузимању дела одређене дужине у партицију. Елементарним трансформацијам је

$$\prod_{k\geqslant 1}(1+x^k) = \prod_{k\geqslant 1}\frac{1-x^{2k}}{1-x^k} = \frac{(1-x^2)(1-x^4)\ldots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots} = \prod_{k\geqslant 1}\frac{1}{1-x^{2k+1}}$$

чиме је доказано тврђење задатка.

Задатак 3: Наћи број пермутација без фиксних тачака дужине n.

Решење: Ово је пример који показује ефикасну примену експоненцијалних генератриса. Овај проблем је познат као и проблем деранжмана или као "le Problème des Rencontres" који је поставио Пјер Р. де Монморт (Pierre R. de Montmort; 1678.-1719.) Нека је тражени број D_n и $D(x) \overset{esr}{\leftrightarrow} D_n$. Број пермутација који имају k одређених фиксних тачака је D_{n-k}, па је укупан број пермутација са тачно k фиксних тачака $\binom{n}{k}D_{n-k}$, јер k одређених фиксних тачака можемо да изаберемо на $\binom{n}{k}$ начина. Како је укупан број пермутација $n!$, то је

$$n! = \sum_k \binom{n}{k} D_{n-k}$$

или у запису експоненцијалних генератриса

$$\frac{1}{1-x} = e^x D(x)$$

одакле је $D(x) = e^{-x}/(1-x)$. Како је e^{-x} генератриса низа $\dfrac{(-1)^n}{n!}$, то је

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!},$$

$$D_n = n! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

Задатак 4: Израчунати

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{3k}$$

Решење: Овај задатак илуструје једну идеју која се често јавља у комбинаторици. Можемо да посматрамо функцију генератрисе

$$F(x) = \sum_k \binom{n}{3k} x^{3k},$$

јер нам она личи на биномни развој $(1+x)^n$ али и зато јер је тражена сума управо $f(-1)$. Међутим, како да постигнемо да нам се у биномном развоју јавља сваки трећи члан? Користићемо да је

$$\sum_{\varepsilon^r=1} \varepsilon^n = \begin{cases} r, & r|n \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Нека је $C(x) = (1+x)^n$ и нека су 1, ε и ε^2 кубни корени из 1. Тада је

$$F(x) = \frac{C(x) + C(\varepsilon x) + C(\varepsilon^2 x)}{3}$$

што за $x = -1$ даје

$$F(-1) = \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right)^n \right\}$$

или када се упрости

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{3k} = 2 \cdot 3^{n/2-1} \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

Задатак 5: Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека

$$x + 2y = n \quad \text{има } R_1 \text{ решења у } \mathbb{N}_0^2$$

$$2x + 3y = n - 1 \quad \text{има } R_2 \text{ решења у } \mathbb{N}_0^2$$

$$\vdots$$

$$nx + (n+1)y = 1 \quad \text{има } R_n \text{ решења у } \mathbb{N}_0^2$$

$$(n+1)x + (n+2)y = 0 \quad \text{има } R_{n+1} \text{ решења у } \mathbb{N}_0^2$$

Доказати да је

$$\sum_k R_k = n + 1$$

Решење: Број решења једначине $x+2y=n$ у $\mathbb{N}_0^2$ је коефицијент уз t^n у

$$(1+t+t^2+\dots)\cdot(1+t^2+t^4+\dots)=\frac{1}{1-t}\frac{1}{1-t^2}$$

То је зато што за сваки пар (x,y) који задовољава услов повећава коефицијент уз t^n за 1 јер учествује као сабирак са $t^x t^{2y}=t^{x+2y}$. И уопште, број решења једначине $kx+(k+1)y=n+1-k$ је коефицијент уз t^{n+1-k} у $\frac{1}{1-t^k}\frac{1}{1-t^{k+1}}$, тј. коефцијент уз t^n у $\frac{x^{k-1}}{(1-t^k)(1-t^{k+1})}$
Дакле, $\sum_{k=1}^{n} R_k$ је коефицијент уз t^n у $\sum_k \frac{t^{k-1}}{(1-t^k)(1-t^{k+1})}=\sum_k \frac{1}{t-t^2}\left(\frac{1}{1-t^{k+2}}-\frac{1}{1-t^{k+1}}\right)=\frac{1}{(1-t)^2}$, одакле је сада лако $\sum_k R_k=n+1$ што је и требало доказати.

Задатак 6: Одредити везе између основних *симетричних полинома*

Решење: Једна од основних веза полинома је веза између разних симетричних полинома. Под *симетричним* полиномом се сматра полином $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ такав да за сваку пермутацију $\sigma\in S_n$ важи $f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})=f(x_1,\dots,x_n)$. Један од основних примера симетричних полинома су *елементарни* симетрични полиноми

$$\sigma_k(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i_1<\dots<i_k} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_k}$$

за $1\leqslant k\leqslant n$ и $\sigma_0=1$ и $\sigma_k=0$ за $k>n$.

Генератриса симетричних полинома је

$$\Sigma(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma_k t^k=\prod_{i=1}^{n}(1+tx_i)$$

Друга класа симетричних полинома су полиноми облика

$$p_k(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i_1+\dots+i_n=k} x_1^{i_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{i_n},\qquad \text{где су } i_1,\dots,\imath_n\in\mathbb{N}_0$$

Њихова функција генератрисе је

$$P(t)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k t^k=\prod\frac{1}{1-tx_i}$$

Такође су битни и полиноми облика

$$s_k(x_1,\dots,x_n)=x_1^k+\ldots+x_n^k$$

чија је функција генератрисе

$$S(t)=\sum_{k=0}^{\infty}s_k t^{k-1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-tx_i}$$

Генератрисе $\Sigma(t)$ и $P(t)$ задовољавају следећи услов $\Sigma(t)p(-t)=1$. Ако израчунамо коефицијент овог производа уз t^n, $n\geqslant 1$ добијамо везу

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\sigma_r p_{n-r}=0$$

Ако приметимо да је

$$\ln P(t) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{1 - tx_i} \qquad \text{и} \qquad \ln \Sigma(t) = \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + tx_i),$$

можемо $S(t)$ да изразимо преко $P(t)$ и $\Sigma(t)$ на следећи начин:

$$S(t) = \frac{d}{dt} \ln P(t) = \frac{P'(t)}{P(t)}$$

и

$$S(-t) = -\frac{d}{dt} \ln \Sigma(t) = -\frac{\Sigma'(t)}{\Sigma(t)}.$$

Из прве формуле следи $S(t)P(t) = P'(t)$, а из друге $S(-t)\Sigma(t) = -\Sigma'(t)$. Упоређивањем коефицијената уз t^{n+1} добијамо

$$np_n = \sum_{r=1}^{n} s_r p_{n-r} \qquad \text{и} \qquad n\sigma_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} s_r \sigma_{n-r}.$$

Задатак 7: Претпоставимо да за неко $n \in \mathbb{N}$ постоје низови позитивних бројева $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ такви да су суме

$$a_1 + a_2,\ a_1 + a_3,\ \ldots,\ a_{n-1} + a_n$$

и

$$b_1 + b_2,\ b_1 + b_3,\ \ldots,\ b_{n-1} + b_n$$

исте до на пермутацију. Доказати да је n степен двојке.

Решење: Нека су F и G полиноми генерисани датим низом: $F(x) = x^{a_1} + x^{a_2} + \cdots + x^{a_n}$ и $G(x) = x^{b_1} + x^{b_2} + \cdots + x^{b_n}$. Тада је

$$F^2(x) - G^2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x^{2a_i} + 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x^{a_i + a_j} \right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x^{2b_i} + 2 \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x^{b_i + b_j} \right) = F(x^2) - G(x^2).$$

Како је $F(1) = G(1) = n$, имамо да је 1 нула реда $k, (k \geqslant 1)$ полинома $F(x) - G(x)$. Тада је $F(x) - G(x) = (x-1)^k H(x)$, па је

$$F(x) + G(x) = \frac{F^2(x) - G^2(x)}{F(x) - G(x)} = \frac{F(x^2) - G(x^2)}{F(x) - G(x)} = \frac{(x^2-1)^k H(x^2)}{(x-1)^k H(x)} = (x+1)^k \frac{H(x^2)}{H(x)}$$

Сада је за $x = 1$:

$$2n = F(1) + G(1) = (1+1)^k \frac{H(x^2)}{H(x)} = 2^k,$$

одакле се добија да је $n = 2^{k-1}$.

Следеће тврђење су поставили и доказали канадски математичари Лео Мозер (Leo Moser) и Џо Ламбек (Joe Lambek) 1959. године.

Задатак 8: Доказати да постоји јединствен начин да се природни бројеви распореде у две партиције, A и B, тако да се сваки природан број (укључујући и 0) може изразити у облику $a_1 + a_2,\ \ a_1, a_2 \in A,\ \ a_1 \neq a_2$ тачно на онолико начина (а бар на један) на колико се може изразити у облику $b_1 + b_2,\ \ b_1, b_2 \in B,\ \ b_1 \neq b_2$.

Решење: Посматрајмо полиноме генерисаним бројевима који се налазе у одговарајућим скуповима:

$$A(x) = \sum_{a \in A} x^a, \quad B(x) = \sum_{b \in B} x^b.$$

Услов да скупови A и B прекривају цео скуп $\mathbb{N}$ без преклапања је еквивалентан са

$$A(x) + B(x) = \frac{1}{1-x}$$

Број начина на који се неки број може представити у облику $a_1 + a_2,\ \ a_1, a_2 \in A,\ \ a_1 \neq a_2$ је

$$\sum_{a_i, a_j \in A, a_i \neq a_j} x^{a_i + a_j} = \frac{1}{2}\left(A^2(x) - A(x^2)\right).$$

Сада се други део услова тривијално пише као

$$\left(A^2(x) - A(x^2)\right) = \left(B^2(x) - B(x^2)\right).$$

Даље је

$$(A(x) - B(x))\frac{1}{1-x} = A(x^2) - B(x^2)$$

односно

$$(A(x) - B(x)) = (1-x)(A(x^2) - B(x^2)).$$

Заменом x са $x^2, x^4, \ldots, x^{2^{n-1}}$ добијамо да је

$$A(x) - B(x) = \left(A(x^{2^n}) - B(x^{2^n})\right) \prod_{i=0}^{n-1} (1 - x^{2^i}),$$

одакле је

$$A(x) - B(x) = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - x^{2^i}).$$

Последњи производ је ред чији су коефицијенти ± 1, па су A и B јединствено одређени (с обзиром да су им коефицијенти 1). Није тешко приметити да су позитивни коефицијенти (а самим тим из A) они који стоје уз чланове x^n такве да се n може представити као збир парног броја степена двојки (тј. бинарна репрезентација броја n има паран број јединица). Остали бројеви чине скуп B.

Напомена: Низ који представља парност броја јединица у бинарној репрезентацији броја n је такозвани Морзеов низ.

Задатак 9: Ако сваки природан број припада тачно једној (од бар две) аритметичке прогресије, онда постоје две прогресије чији су кораци једнаки.

Решење: Овај проблем је поставио (у мало измењеној форми) још Ердош (Erdösz), а доказали су га Мирски (Mirsky) и Њумен (Newman) након дуго година. Ово је њихов оригинални доказ:

Нека k аритметичких прогресија $\{a_i + nb_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ покривају цео скуп природних бројева. Тада је $\frac{z^a}{1 - z^b} = \sum_{i=0}^{\infty} z^{a+ib}$, па је

$$\frac{z}{1-z} = \frac{z^{a_1}}{1 - z^{b_1}} + \frac{z^{a_2}}{1 - z^{b_2}} + \cdots + \frac{z^{a_k}}{1 - z^{b_k}}.$$

При томе је $|z| \leqslant 1$. Претпоставимо да је b_1 највећи међу бројевима $b_1, b_2, \dots, b_n$ и нека је при томе $\varepsilon = e^{2i\pi/b_1}$. Нека z тежи ε тако да је $|z| \leqslant 1$. При томе је $\varepsilon^{b_1} = 1$, $\varepsilon \neq 1$ и $\varepsilon^{b_i} \neq 1$, $1 < i \leqslant k$. Сви чланови осим првог због тога теже неком коначном броју, док први тежи ∞, што је немогуће.

Следећи задатак је својевремено био објављен у часопису *American Mathematical Monthly*-ју.

Задатак 10: Доказати да је у савременом календару за 13. у месецу највероватнији дан у седмици петак.

Решење: Савремени календар је периодичан са периодом од 400 година. Свака четврта година је преступна, осим оних који су дељиве са 100 а нису са 400. Пошто број месеци у 400 година није дељив са 7, то значи да вероватноћа за 13-ти дан у месецу да буде за све дане у недељи $\frac{1}{7}$! Довољно је да за неки период одредимо колико се који дан (у седмици) јавља као први у месецу за неки период од 400 година (рецимо од 1.1.2001. па до 31.12.2401.). Тако петку тринаестом одговара недеља први истог месеца. Означимо дане редом бројевима 1, 2, 3, ..., и нека i-том дану одговара члан t^i. Дакле, 1.1.2001.г. је означен са 1 или са t, 4.1.2001.г. са t^4 итд. Нека је A скуп свих дана (односно бројева којима смо их означили) који се јављају први у месецу. Рецимо, 1.1.2001.г. је означен са $1 \in A$, 1.2.2001.г. је $32 = 1 + 31 \in A$ итд, $A = \{1, 32, 60, \dots\}$ (за просту годину). Нека је $f_A(t) = \sum_{n \in A} t^n$. Ако у полиному f_A заменимо t^{7k} са 1, t^{7k+1} са t, t^{7k+2} са t^2 итд., дибијамо неки полином, означимо га са $g_A(t) = \sum_{i=0}^{6} a_i t^i$. Сада нам број a_i представља колико се пута дан (у недељи) који је био означен са i јављао као први у месецу. Како је 1.1.2001. године био понедељак, то је a_1 број понедељака који су били први у месецу, a_2 број уторака, ..., a_0 број недеља. Замену одговрајућих чланова можемо извести ако посматрамо полином f_A по модулу $t^7 - 1$. Дакле, полином $f_A(t) - g_A(t)$ је дељив са $t^7 - 1$. Како је довољно да само одредимо који је од бројева $a_0, a_1, \dots, a_6$ највећи, довољно је да полином посматрамо по модулу $q(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^6$ који је делитељ полинома $t^7 - 1$. Нека је $f_1(t)$ полином који представља прве дане у месецима у 2001. години. Како је први дан јануара понедељак, фебруара четвртак, ..., децембра субота, то је

$$g_1(t) = t + t^4 + t^4 + 1 + t^2 + t^5 + 1 + t^3 + t^6 + t + t^4 + t^6 =$$

$$= 2 + 2t + t^2 + t^3 + 3t^4 + t^5 + 2t^6 \equiv 1 + t + 2t^4 + t^6 \pmod{q(t)}.$$

Како једна проста година има $365 \equiv 1 \pmod 7$ дана, то полиноми $f_2(t)$ и $f_3(t)$ који одговарају 2002. и 2003. години, задовољавају

$$f_2(t) \equiv t f_1(t) \equiv t g_1(t)$$

и

$$f_3(t) \equiv t f_2(t) \equiv t^2 g_1(t),$$

где су све конгруенције по модулу $q(t)$. Обичним пребројавањем се установљава да је полином $f_4(t)$ за преступну 2004. годину

$$f_4(t) = 2 + 2t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + t^5 + t^6 \equiv 1 + t + t^3 + 2t^4 = g_4(t).$$

Можемо увести и нови полином који ће нам бројати прве дане за период 2001.-2004. година $h_1(t) = g_1(t)(1 + t + t^2) + g_4(t)$. Такође, после сваке просте године се дани помере за једно место, док после преступне за 2, па се након периода од 4 године сви дани помере за 5 места. Тако добијамо полином који броји све прве дане у периоду од 2001. до 2100. године. То је:

$$p_1(t) = h_1(t)(1 + t^5 + t^{10} + \dots + t^{115}) + t^{120} g_1(t)(1 + t + t^2 + t^3).$$

Овде смо морали последње четири године да напишемо у облику $g_1(t)(1+t+t^2+t^3)$ јер година 2100. није преступна, па је не можемо заменити полиномом $h_1(t)$. Период од 100 година помери календар за 100 дана (просте године) и још 24 дана (преступне) што по модулу 7 даје 5 дана. Сада можемо коначно написати формулу

$$g_A(t) \equiv p_1(t)(1+t^5+t^{10}) + t^{15}h_1(t)(1+t^5+\ldots+t^{120}).$$

Слично као и раније, последних 100 година смо обухватили последњих сабирцима јер година 2400. није проста већ преступна! Користићемо да је $t^{5a}+t^{5(a+1)}+\ldots+t^{5(a+6)} \equiv 0$. Сада је $1+t^5+\ldots+t^{23\cdot 5} \equiv 1+t^5+t^{2\cdot 5} \equiv 1+t^3+t^5$ и $1+t^5+\ldots+t^{25\cdot 5} \equiv 1+t^5+t^{2\cdot 5}+t^{4\cdot 5} \equiv 1+t+t^3+t^5$. Даље имамо да је

$$p_1(t) \equiv h_1(t)(1+t^3+t^5) + tg_1(t)(1+t+t^2+t^3) \equiv$$

$$g_1(t)[(1+t+t^2)(1+t^3+t^5)+t(1+t+t^2+t^3)] + g_4(t)(1+t^3+t^5) \equiv$$
$$g_1(t)(2+2t+2t^2+2t^3+2t^4+2t^5+t^6) + g_4(t)(1+t^3+t^5) \equiv -g_1(t)t^6 + g_4(t)(1+t^3+t^5).$$

Ако сада ово заменимо у формулу за $g_A(t)$ добијамо

$$g_A(t) \equiv p_1(t)(1+t^3+t^5) + th_1(t)(1+t+t^3+t^5) \equiv$$

$$-g_1(t)t^6(1+t^3+t^5) + g_4(t)(1+t^3+t^5)^2 + tg_1(t)(1+t+t^2)(1+t+t^3+t^5) + tg_4(t)(1+t+t^3+t^5) \equiv$$
$$g_1(t)(t+t^3) + g_4(t)(2t+2t^3+t^5+t^6) \equiv$$
$$(1+t+2t^4+t^6)(t+t^3) + (1+t+t^3+2t^4)(2t+2t^3+t^5+t^6) \equiv$$
$$8+4t+7t^2+5t^3+5t^4+7t^5+4t^6 \equiv 4+3t^2+t^3+t^4+3t^5.$$

Ово значи да је највероватнији дан за први у месецу недеља (јер је a_0 највећи од свих чланова). Како петку тринаестом одговара недеља први, то је доказ завршен. Можемо у ствари и тачно добити колика је та вероватноћа. Ако искористимо ћињеницу да је укупан број месеци у периоду од 400 година 4800, можемо лако добити да је недеља прва дан у 688 месеци, понедељак - 684, уторак - 687, среда - 685, четвртак - 685, петак - 687 и субота - 684.

Закључак

Материјал изложен у претходних тридесетак страна је само мали део целокупне теорије генератриса. Без обзира на то, овде су изложене све битне идеје и методе које леже у основи теорије генератриса и које су потребне за даље самостално коришћење ове технике. Сви заинтересовани за ову област могу продубити своје знање уз помоћ [**?**].

Желео бих такође да се захвалим мом ментору Владимиру Балтићу, као и професорима математичких предмета мр Срђану Огњановићу (разредном старешини у исто време) као и др Милени Радновић. Посебну захвалност дугујем још и математичарима који су се трудили свих ових година око додатних настава и припрема за такмичење: Душану Ђукићу, др Владимиру Јанковићу, Ђорђу Кртинићу, Владимиру Лазићу, Миливоју Лукићу и Ивану Матићу.

Литература

[1] H.S. Wilf, 1994, *generatingfunctionology* , University of Pennsylvania, Philadelphia, USA
Електронска верзија: http://www.math.upenn.edu/∼wilf/gfologyLinked.pdf

[2] Д. Стевановић, М. Милошевић, В. Балтић, 2004, *Дискретна математика, основе комбинаторике и теорије графова - збирка решених задатака*, Друштво математичара Србије, Београд (у припреми)
Електронска верзија: http://www.pmf.ni.ac.yu/people/dragance/zbirka.pdf

[3] В. Дренски, ,,Пораждащи функции" у *Подготовка за олимпиади под редакцията на Сава Гроздев*, 2002, Съюз на математиците в България, София

[4] Електронски материјал: http://www.math.uvic.ca/faculty/gmacgill/guide/GenFuncs.pdf

[5] Lerma, A.M., 2003., *Generating functions* ,
http://www.math.northwestern.edu/ mlerma/problem_solving/results/gen_func.pdf

[6] Електронски материјал: http://www.cs.brandeis.edu/∼ira/47a/gf.pdf

[7] П. Младеновић, 2001, *Комбинаторика*, Друштво математичара Србије, Београд

Садржај