Инверзија

верзија 4.0: 13.4.2013.

Душан Ђукић

Инверзија $\Psi = \Psi_{O,r}$ је пресликавање равни (или простора) без своје унутрашње тачке O у себе, одређено кругом k са центром O и полупречником r, које слика тачку $A \neq O$ у равни у тачку $A' = \Psi(A)$ на полуправој OAтакву да је $OA \cdot OA' = r^2$. Надаље, осим ако нагласимо другачије, X' ће увек означавати слику X под разматраном инверзијом.

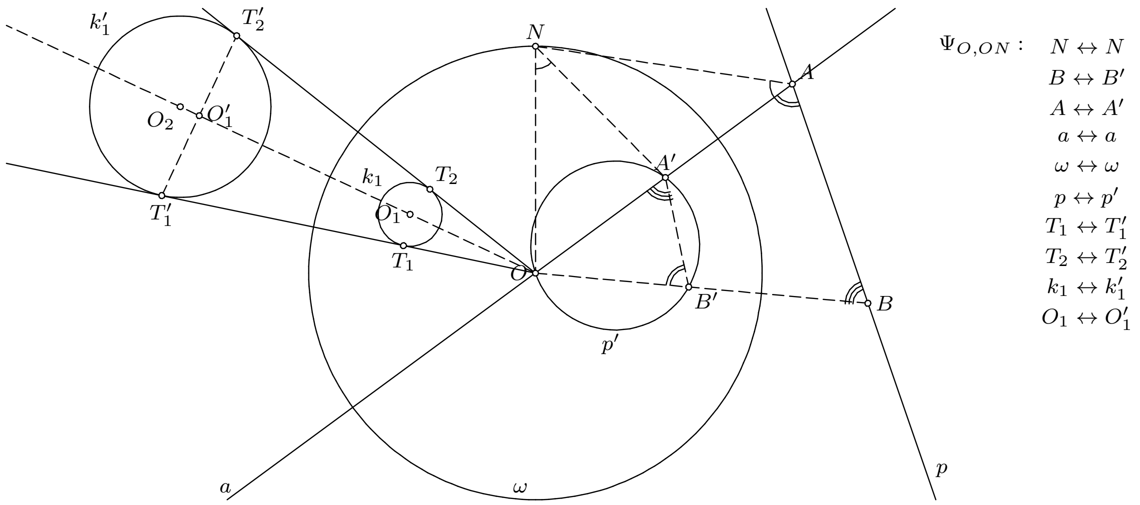
Пресликавање Ψ је инверзно самом себи и слика унутрашњост круга k у спољашњост и обрнуто - зато се и зове "инверзија". Својство инверзије које следеће уочавамо је да је $\triangle P'OQ' \sim \triangle QOP$ за све тачке $P, Q \neq O$ (јер је $\angle P'OQ' = \angle QOP$ и $OP'/OQ' = (r^2/OP)/(r^2/OQ) = OQ/OP$), са коефицијентом сличности $\frac{r^2}{OP \cdot OQ}$. Последица тога је да је

$$\angle OQ'P' = \angle OPQ \quad \text{и} \quad P'Q' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

Суштински главни параметар инверзије је њен центар. Варирањем полупречника не мења се облик инверзне слике датог објекта, већ само њена величина. Заиста, посматрајмо две инверзије Ψ_{O,r_1} и Ψ'_{O,r_2}. Ако инверзија Ψ слика тачку A у A', онда је инверзија Ψ' слика у тачку A'' такву да је $OA'' = \frac{r_2^2}{OA} = (\frac{r_2}{r_1})^2 OA'$. Дакле, тачка A'' је хомотетична слика тачке A' са центром хомотетије у O и константним коефицијентом $(\frac{r_2}{r_1})^2$. Ипак, биће примера када ћемо много лакше моћи да видимо шта се догађа на слици погодним избором полупречника инверзије.

Слика дате тачке, праве или круга у односу на дати круг може се конструисати лењиром и шестаром. Инвертну слику тачке $A \neq O$ у односу на круг k са центром O констуишемо као јединствену тачку A' на полуправој OA за коју је $\angle ONA' = \angle OAN$, где је N произвољна тачка на кругу k ван праве OA.

Инверзија чува припадност. Између осталог, то значи да ако се права или круг k и тачка A на њему сликају инверзијом у k' (шта год то било) и тачку A', онда A' лежи на k'. Такође, ако се круг k_1 и круг (или права) k_2 додирују у тачки A, онда се и њихове слике k_1' и k_2' додирују у тачки A' која је слика тачке A.



Посебно важна особина инверзије је чињеница да она слика праве и кругове у праве и кругове. Очигледно је да се права кроз O слика у себе. Шта ако је p права која не пролази кроз O? Нека је P подножје нормале из O на p и $Q \in p$ произвољна тачка. Угао $\angle OPQ = \angle OQ'P'$ је увек прав, па се Q' налази на кругу k над пречником OP'. Дакле, $\Psi(p) = k$ и такође, $\Psi(k) = p$.

Најзад, у шта се слика круг k који не пролази кроз O? Тврдимо да је његова слика такође круг, а да бисмо то доказали, довољно је да покажемо да се четири концикличне тачке A, B, C, D инверзијом сликају у четири концикличне тачке A', B', C', D' (сви посматрани углови су оријентисани). Докажимо да је $\angle A'C'B' = \angle A'D'B'$. Имамо $\angle A'C'B' = \angle OC'B' - \angle OC'A' = \angle OBC - \angle OAC$ и аналогно $\angle A'D'B' = \angle OBD - \angle OAD$, одакле је $\angle A'D'B' - \angle A'C'B' = \angle CBD - \angle CAD = 0$, што нам је и требало. Према томе:

- Права кроз O се слика у себе.
- Круг кроз O се слика у праву која не садржи O и обрнуто.
- Круг који не садржи O се слика у круг који не садржи O (не обавезно исти).

Инверзна слика праве или круга је права или круг јединствено одређен сликама три произвољне тачке полазног објекта, те се тако и она може конструисати лењиром и шестаром.

Напомена. Из свега наведеног није тешко видети да инверзија чува углове између кривих, нпр. кругова или правих. Оваква пресликавања равни се називају *конформним* пресликавањима.

Задатак 1. Четири круга се по два додирују. Доказати да су додирне тачке колинеарне или концикличне.

Решење. Нека се кругови k_1 и k_2, k_2 и k_3, k_3 и k_4, k_4 и k_1 додирују редом у A, B, C, D. Инверзијом са центром у A кругови k_1 и k_2 се сликају у паралелне праве k_1' и k_2', а k_3 и k_4 у кругове k_3' и k_4' који се додирују у C' и додирују праве k_2' и k_1' редом у B' и D'. Лако се показује да су B', C', D' колинеарне, одакле следи да су B, C, D на кругу са A.

Задатак 2. Доказати да за тачке A, B, C, D важи $AB \cdot CD + BC \cdot DA \geq AC \cdot BD$ и да једнакост важи ако и само ако су A, B, C, D на кругу или правој у том редоследу. (*Птоломејева неједнакост*)

Решење. Применимо инверзију са центром у A и полупречником r. Имамо $AB = \frac{r^2}{AB'}$, $CD = \frac{r^2}{AC' \cdot AD'} C'D'$, итд. Тражена неједнакост се своди на $C'D' + B'C' \geq B'D'$.

Као што смо видели, инверзија слика круг k у неки круг (или праву) k', али (*пажња!*) било би брзоплето и погрешно закључити да се центар круга k слика у центар k'. Испитајмо где се слика центар круга $k(C, \rho)$ инверзијом $\Psi_{O,r}$. Разликујемо три случаја.

(1) O је ван круга k. Нека су T_1 и T_2 додирне тачке тангенти из O на k. Тада су T_1' и T_2' додирне тачке тангенти из O на k'. Осим тога, тачке C, T_1, T_2 леже на кругу који садржи O, и зато се њихове инверзне слике C', T_1', T_2' налазе на правој. Следи да је C' подножје нормале из O на $T_1'T_2'$.

(2) O је унутар круга k. Нека нормала у O на OC сече k у тачкама U_1 и U_2. Круг OCU_1 додирује k, па следи да његова слика, права $C'U_1'$ додирује k'. Такође и $C'U_2'$ додирује k', дакле C' се налази у пресеку тангенти на k' у тачкама U_1', U_2'.

(3) O лежи на кругу k. Нека је D тачка круга k дијаметрално супротна тачки O. Инверзија слика k у праву k' и слика D у подножје нормале D' из O на k'. Из $OD = 2OC$ следи $OC' = 2OD'$, дакле C' је тачка симетрична тачки O у односу на k'.

Задатак 3. У троуглу ABC уписани круг додирује BC, CA и AB у M, N и P, редом. Доказати да су центри описаног и уписаног круга у ABC и ортоцентар троугла MNP колинеарни.

Решење. Центар уписаног круга троугла ABC и ортоцентар троугла MNP леже на Ојлеровој правој $\triangle ABC$. Инверзијом у односу на уписани круг троугла ABC тачке A, B, C се сликају у средишта дужи NP, PM, MN, па се описани круг ABC слика у Ојлеров круг троугла MNP чији је центар такође на Ојлеровој правој. Одавде следи да је и центар круга ABC на Ојлеровој правој троугла MNP.

Нека је дат троугао ABC. Инверзија у односу на описани круг (O, R) троугла слика темена троугла у себе (али странице слика у кругове кроз O). Променом полупречника слика се мења хомотетично са центром хомотетије у O. Шта се дешава ако центар инверзије поставимо у неку другу значајну тачку троугла? Посматрајмо инверзију са центром у ортоцентру H. Слика $A'B'C'$ датог троугла у оваквој инверзији задовољава $\angle HA'B' = \angle HBA = 90^\circ - \angle A = \angle HCA = \angle HA'C'$; аналогно, $\angle HB'A' = \angle HB'C'$, што значи да је у инверзној слици H центар уписаног круга троугла $A'B'C'$! Слично, инверзија са центром у центру уписаног круга S троугла ABC слика троугао у $A'B'C'$ коме је S ортоцентар.

Када користити инверзију? Најбољи одговор на ово питање даје искуство и не може се пренети на папир. Укратко, од инверзије често очекујемо да смањи број непожељних кругова и непријатних углова на слици. Тако неке ситуације "позивају" на инверзију:

- Имамо више кругова и правих кроз исту тачку A. Инверзија са центром A.
- Имамо више углова $\angle AXB$ са фиксним A, B. Инверзија кроз A (или B).

У геометрији троугла (означимо га са ABC) често помаже инверзија са центром у темену, нпр. A. При тој инверзији тачке B и C се сликају у тачке B' и C' хомотетично симетричне тачкама C и B у односу на симетралу угла код A; другим речима, $\triangle AB'C'$ је хомотетично симетричан троуглу ABC у односу на симетралу угла A. Лако се можете уверити шта се догађа са осталим значајним објектима троугла:

- Симетрала $\angle BAC \longleftrightarrow$ симетрала $\angle BA'C'$.
- Права $BC \longleftrightarrow$ описани круг троугла $AB'C'$.
- Центар O описаног круга $\triangle ABC \longleftrightarrow$ тачка O' симетрична A у односу на $B'C'$.
- Центар I уписаног круга $\triangle ABC \longleftrightarrow$ центар приписаног круга $\triangle AB'C'$ наспрам A.
- Подножја висине D из темена $A \longleftrightarrow$ тачка дијаметрално супротна темену A на описаном кругу $\triangle AB'C'$.
- Подножје висине E из темена $B \longleftrightarrow$ тачку E' на правој AC' са $\angle ABE' = 90^\circ$.

У зависности од полазне слике, можемо да одаберемо полупречник инверзије тако да лакше видимо шта се догађа. На пример, ако су BE и CF висине троугла ABC, инверзија $\mathcal{I}_{A,\sqrt{AB\cdot AF}}$ слика тачке B, C редом у F, E и обратно.

Не треба очекивати од инверзије да све непожељне кругове са полазне слике претвори у праве. С друге стране, понекад је од помоћи претворити два дата круга у концикличне кругове.

Теорема. Ако су дати кругови k_1, k_2, постоји инверзија Ψ која их слика у *(i)* две праве (ако имају заједничку тачку), или у *(ii)* два концентрична круга (ако су дисјунктни).

Доказ. Ако k_1 и k_2 имају заједничку тачку, довољно је узети инверзију са центром у тој тачки; ако су концентрични, инверзију у заједничком центру. Сада претпоставимо да немају заједничку тачку и нису концентрични. Поставимо x-осу координатне равни дуж праве кроз центре k_1 и k_2. Тражићемо центар O жељене инверзије Ψ на овој оси; полупречник инверзије можемо узети да буде 1. Нека x-оса сече k_1 у тачкама A_1 и A_2 с координатама a_1 и a_2 редом, и k_2 у тачкама B_1 и B_2 с координатама b_1 и b_2. Ако је x координата тражене тачке O, слике тачака A_1, A_2, B_1, B_2 ће бити тачке A_1', A_2', B_1', B_2' с координатама $x + \frac{1}{a_1 - x}$, $x + \frac{1}{a_2 - x}$, $x + \frac{1}{b_1 - x}$, $x + \frac{1}{b_2 - x}$, редом. Можемо узети без смањења општости да је $b_2 < a_1 < a_2$ и није $a_1 < b_1 < a_2$. Пошто су кругови k_1' и k_2' концентрични, важи $\frac{1}{a_1-x}+\frac{1}{a_2-x}=\frac{1}{b_1-x}+\frac{1}{-x}$, што после свођења на заједнички именилац и сређивања даје квадратну једначину по x:

$$(b_1+b_2-a_1-a_2)x^2-2x(b_1b_2-a_1a_2)+(a_1+a_2)b_1b_2-(b_1+b_2)a_1a_2=0.$$

Дискриминанта ове једначине је $4(b_1b_2-a_1a_2)^2-4(b_1+b_2-a_1-a_2)((a_1+a_2)b_1b_2-(b_1+b_2)a_1a_2)=4(a_1-b_1)(a_1-b_2)(a_2-b_1)(a_2-b_2)>0$, па постоји реално решење x које одговара траженој тачки O. Будући решење квадратне једначине, ова тачка O се може конструисати лењиром и шестаром.

• **Аполонијев проблем**

Овај класични проблем је поставио и решио антички грчки математичар Аполоније из Пергама у 3. веку п.н.е. У њему се тражи да се помоћу лењира и шестара конструише круг који додирује три дата круга. Специјални случајеви укључују конструцију круга који додирује три дата објекта, од којих сваки може бити тачка, права или круг (нпр. тривијалан случај, круг који пролази кроз три тачке). У општем случају проблем може да има 8 решења. Показаћемо како се овај задатак, иначе нимало једноставан, решава помоћу инверзије.

Нека су дати кругови $k_1(O_1,r_1)$, $k_2(O_2,r_2)$ и $k_3(O_3,r_3)$ у равни; тражи се круг $k(O,r)$ који додирује сва три круга. Нека је $r_1 \geq r_2 \geq r_3$. Прво што можемо да урадимо јесте да смањимо полупречнике сва три круга за r_3. Круг $\tilde{k}(O,r-r_3)$ или $\tilde{k}(O,r+r_3)$ (у зависности од тога да ли k_3 додирује k споља или изнутра) ће додиривати кругове $k_4(O_1,r_1-r_3)$, $k_5(O_2,r_2-r_3)$ и пролазити кроз тачку O_3 - овако смо свели проблем на налажење круга који додирује два дата круга k_4,k_5 и пролази кроз дату тачку O_3.

Произвољна инверзија Ψ са центром у O_3 сликаће тражени круг $\tilde{k}$ у праву која додирује слике k_4' и k_5' кругова k_4 и k_5. Пошто се слика при инверзији Ψ може конструисати лењиром и шестаром, остаје нам још само да конструишемо заједничку тангенту кругова k_4' и k_5', а то умемо да урадимо.

Задаци

1. Различити кругови $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4$ су такви да се Γ_1 и Γ_3 додирују споља у P, и Γ_2 и Γ_4 се такође додирују споља у P. Нека се Γ_1 и Γ_2, Γ_2 и Γ_3, Γ_3 и Γ_4, Γ_4 и Γ_1 секу редом у тачкама A,B,C,D, различитим од P. Доказати да је
$$\frac{AB\cdot BC}{AD\cdot DC}=\frac{PB^2}{PD^2}.$$
(*Предлог за ММО 2003.*)

2. Нека је ω полукруг над пречником PQ. Круг k додирује ω изнутра и дуж PQ у C. Нека је AB тангента круга k нормална на PQ, са A на ω и B на дужи CQ. Доказати да AC полови угао $\angle PAB$.

3. На правој су дате тачке A,B,C, у том распореду. Кругови k и l редом су конструисани над AB и BC са исте стране праве. Круг t додирује круг k, l у тачки $T\neq C$, и нормалу n на AB кроз C. Доказати да је AT тангента на l.

4. Тачке A,B,C су дате на правој, тим редом. Полукругови ω,ω_1,ω_2 су редом конструисани над AC,AB,BC са исте стране праве. Конструишимо низ кругова (k_n) на следећи начин: k_0 је круг одређен са ω_2 и k_n додирује ω,ω_1,k_{n-1} за $n\geq 1$. Доказати да је растојање центра k_n од AB $2n$ пута веће од полупречника k_n.

5. Тачка M у троуглу ABC задовољава $\angle AMC-\angle ABC=\angle AMB-\angle ACB$. Доказати да се симетрале углова ABM и ACM и права AM секу у једној тачки. (*ММО 1996-2.*)

6. Нека је p полуобим троугла ABC. Тачке D и E на правој AB су такве да је $CD = CE = p$. Доказати да круг описан око CDE додирује круг приписан троуглу ABC код стране AB.

7. У троуглу ABC са $\angle ACB = 2\angle BAC$, симетрала угла ACB сече AB у D. Круг γ са центром S, у полуравни одређеној правом AC у којој је троугао, додирује праву AC и споља додирује описане кругове троуглова ADC и BDC. Доказати да је $CS \perp AB$.

8. Нека је Ω круг описан око троугла ABC. Круг ω додирује странице AC и BC, и изнутра додирује круг Ω у тачки P. Тангента круга ω која је паралелна са AB и сече унутрашњост троугла ABC додирује ω у тачки Q. Доказати да је $\angle ACP = \angle QCB$. (*EGMO 2013.*)

9. Нека су M и N редом средишта страница AB и AC оштроуглог троугла ABC, а AD његова висина. Тачка E на страници BC је таква да је $BD = CE$. Круг ω кроз M и N изнутра додирује описани круг k троугла ABC у тачки F. Доказати да је $\angle BAF = \angle CAE$. (*Републичко 2011.*)

10. Нека су M, N и P средишта страница BC, AC и AB редом, а O центар описаног круга оштроуглог троугла ABC. Кругови описани око троуглова BOC и MNP секу се у различитим тачкама X и Y унутар троугла ABC. Доказати да је $\angle BAX = \angle CAY$. (*CMO 2013.*)

11. Доказати да Ојлеров круг троугла ABC додирује уписани и сва три приписана круга. (*Фојербахова теорема*)

12. Дат је троугао ABC. Круг са центром O пролази кроз A и C и сече AB у K и BC у N. Кругови описани око ABC и KBN секу се у B и M. Доказати да је $\angle OMB = 90°$. (*ММО 1985-5.*)

13. Нека је I центар круга уписаног у неједнакокраки троугао $A_1A_2A_3$. Нека је C_i, $i = 1, 2, 3$, мањи круг кроз I који додирује A_iA_{i+1} и A_iA_{i+2} (сабирање индекса по модулу 3). Кругови C_{i+1} и C_{i+2} се поново секу у B_i, $i = 1, 2, 3$. Доказати да су центри описаних кругова троуглова $A_1B_1I, A_2B_2I, A_3B_3I$ колинеарни. (*Предлог за ММО 1997.*)

14. Кругови $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$ изнутра додирују круг Ω. Осим тога, ω_1, ω_3 и ω_5 се међусобно додирују споља, ω_2 споља додирује ω_1 и ω_3, ω_4 споља додирује ω_3 и ω_5, и ω_6 споља додирује ω_5 и ω_1. Доказати да је шестоугао одређен унутрашњим заједничким тангентама на ω_i и ω_{i+1} ($i = 1, \ldots, 6$, $\omega_7 = \omega_1$) тангентан.

15. Ако седам темена хексаедра леже на истој сфери, доказати да и осмо теме лежи на тој сфери.

16. Сфера са центром у равни стране ABC тетраедра $SABC$ пролази кроз A, B и C и поново сече ивице SA, SB, SC редом у A_1, B_1, C_1. Тангентне равни на сферу у A_1, B_1, C_1 се секу у тачки O. Доказати да је O центар описане сфере тетраедра $SA_1B_1C_1$.

17. Нека су KL и KN тангенте из тачке K на круг k. Тачка M је произвољна на продужетку дужи KN преко N, а P је друга пресечна тачка круга k и круга описаног око троугла KLM. Тачка Q је подножје нормале из N на ML. Доказати да је $\angle MPQ = 2\angle KML$.

18. Троугао ABC је уписан у круг ω. Променљива права паралелна правој BC сече дужи AB и AC у тачкама D и E редом, и сече ω у тачкама K и L (D лежи између K и E). Круг γ_1 додирује дужи KD, BD и круг ω, а круг γ_2 додирује дужи LE, CE и круг ω. Одредити геометријско место тачака пресека унутрашњих заједничких тангенти кругова γ_1 и γ_2. (*RMMC 2011.*)

19. Круг Ω уписан у оштроугли троугао ABC додирује BC у K. Нека је M средиште висине AD троугла ABC. Ако KM поново сече Ω у N, доказати да се Ω и описани круг троугла BCN додирују у N. (*Предлог за ММО 2002.*)

20. Дат је троугао ABC. Нека су тачке D и E на правој AB такве да је $D-A-B-E$, $AD = AC$ и $BE = BC$. Симетрале унутрашњих углова код темена A и B секу наспрамне странице у тачкама P и Q редом, а описани круг око троугла ABC у тачкама M и N редом. Права која спаја тачку A са центром круга описаног око троугла BME и права која спаја тачку B са центром круга описаног око троугла AND секу се у тачки X, $X \neq C$. Доказати да је $CX \perp PQ$. (*СМО 2008.*)

Решења

1. Применимо инверзију са центром P и полупречником r; означимо са $\widehat{X}$ слику X. Кругови $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ се сликају у праве $\widehat{\Gamma_1}, \widehat{\Gamma_2}, \widehat{\Gamma_3}, \widehat{\Gamma_4}$, где је $\widehat{\Gamma_1} \parallel \widehat{\Gamma_3}$ и $\widehat{\Gamma_2} \parallel \widehat{\Gamma_4}$, одакле је $\widehat{A}\widehat{B}\widehat{C}\widehat{D}$ паралелограм. Сада имамо $AB = \frac{r^2}{P\widehat{A} \cdot P\widehat{B}} \widehat{A}\widehat{B}$, $PB = \frac{r^2}{P\widehat{B}}$ итд. Тражена једнакост постаје
$$\frac{P\widehat{D}^2}{P\widehat{B}^2} \cdot \frac{\widehat{A}\widehat{B} \cdot \widehat{B}\widehat{C}}{\widehat{A}\widehat{D} \cdot \widehat{D}\widehat{C}} = \frac{P\widehat{D}^2}{P\widehat{B}^2},$$
што важи јер је $\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{C}\widehat{D}$ и $\widehat{B}\widehat{C} = \widehat{D}\widehat{A}$.

2. Инверзија са центром у C. Полукруг ω се слика у полукруг ω' са центром на $P'Q'$, круг k у тангенту на ω' паралелну $P'Q'$, а права AB такође у круг са центром на $P'Q'$ који додирује k (подударан са кругом одређеним са ω'); при том овај круг сече ω' и $P'Q'$ у A' и B' редом. Сада је $P'A'B'$ једнакокраки троугао са $\angle PAC = \angle A'P'C = \angle A'B'C = \angle BAC$.

3. Инверзијом са центром у T кругови t и l се сликају у паралелне праве t' и l', круг k и права n у кругове у кругове k' и n' који додирују t' и l' (при чему $T \in n'$), и права AB у круг a' који је нормалан на l' (јер инверзија чува углове) и садржи $B', C' \in l'$; према томе, a' је круг над пречником $B'C'$. Кругови k' и n' су подударни, додирују l' у B' и C', и секу a' редом у A' и T. Следи да су A' и T симетричне у односу на симетралу дужи $B'C'$, одакле је $A'T \parallel l'$, тј. AT је тангента на l.

4. При инверзији са центром A и квадратом полупречинка $AB \cdot AC$ тачке B и C мењају места, полукругови ω и ω_1 се сликају у нормале на BC у C и B, а низ кругова (k_n) у низ кругова (k'_n) уписаних у појас између ове две нормале. Јасно је да је растојање центра круга k'_n од AB $2n$ пута веће од његовог полупречника. Како је круг k_n хомотетичан кругу k'_n у односу на A, тврђење одмах следи.

5. Инверзија са центром у A. Тада M' (слика тачке M) задовољава $\angle B'C'M' = \angle AC'M' - \angle AC'B' = \angle AB'M' - \angle AB'C' = \angle C'B'M'$, одакле је $\triangle M'B'C'$ једнакокраки и $\frac{r^2}{AB \cdot AM} BM = B'M' = C'M' = \frac{r^2}{AC \cdot AM} CM$. Према томе, $AB/BM = AC/CM$, одакле одмах следи тврђење.

6. Под инверзијом са центром C и полупречником p, тачке D и E и приписани круг се сликају у себе, а круг описан око $\triangle CDE$ се слика у праву AB која додирује приписани круг. Како инверзија чува тангентност, тврђење задатка следи.

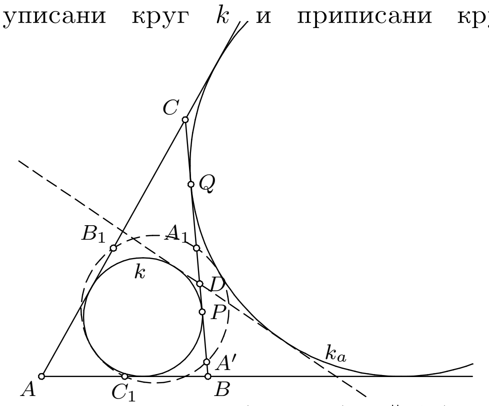
7. Применимо инверзију $\mathcal{I}$ са центром C. Тачке A и B се сликају редом у тачке A' и B', тачка D у средиште D' лука $A'B'$ круга $A'B'C$ који не садржи C, а кругови ADC и BDC у праве $A'D'$ и $B'D'$. Зато је слика γ' круга γ круг који додирује праве $CA', A'D'$ и $D'B'$. Притом нам услов $\angle ACB = 2\angle BAC$ даје $CA' = A'D' = D'B'$, па γ додирује CA' у средишту те дужи. Тачка S се налази на правој CO, где је O центар круга γ', па је $\angle ACS = \angle A'CO = \angle OA'C = \frac{1}{2}\angle D'A'C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A'CB') = 90^\circ - \angle CAB$, тј. $CS \perp AB$.

8. Нека тангента на ω сече CA у A_1 и CB у B_1. Означимо са X' слику X при инверзији са центром C и датим полупречником. Круг Ω се слика у праву $A'B'$, док се ω слика у круг ω' који додирује праву AB и продужетке правих CA и CB; дакле, ω' је приписани круг троугла $A'B'C$ наспрам C, а његова додирна тачка са $A'B'$ је слика P' тачке P. Како је Q додирна тачка приписаног круга са страницом у $\triangle A_1B_1C$ који је сличан троуглу $B'A'C$, важи $\angle QCB = \angle P'CA' = \angle PCA$.

9. Нека је $\mathcal{I}$ композиција инверзије са центром A и квадратом полупречника $AB \cdot AC$ и симетрије у односу на симетралу $\angle BAC$. Пресликавање $\mathcal{I}$ слика тачке B и C једну у другу, круг k у праву BC, тачке M и N редом у тачке M', N' на полуправим AC и AB такве да је $AC = CM'$ и $AB = BN'$, а круг ω у круг ω' кроз M' и N' који додирује праву BC. Означимо са M_a и N_a редом подножја нормала из M' и N' на BC. Тада је $N_aB = BD$ и $DC = CM_a$, па је E средиште дужи M_aN_a. Како је $M'N' \parallel BC$, круг ω' додирује BC управо у тачки E, дакле, $\mathcal{I}(F) = E$, па одмах следи $\angle BAF = \angle CAE$.

10. Нека је $\mathcal{I}$ композиција инверзије са центром A и квадратом полупречника $\frac{1}{2}AB \cdot AC$ и симетрије у односу на симетралу угла CAB. Пресликавање $\mathcal{I}$ слика B, C и N, P редом у N, P и B, C. Даље, тачка O задовољава $\angle ANO = \angle APO = 90°$, па је њена слика тачка O' таква да је $\angle AO'B = \angle AO'C = 90°$, дакле $O' \equiv D$ је подножје висине AD троугла ABC; такође, D се слика у O. Следи да се круг $\omega_1(MNP)$, који пролази и кроз D, слика у круг $\omega_2(BOC)$, а ω_2 се слика у ω_1. Према томе, пресечне тачке X, Y кругова ω_1, ω_2 се сликају једна у другу, одакле је $\angle BAX = \angle CAY$.

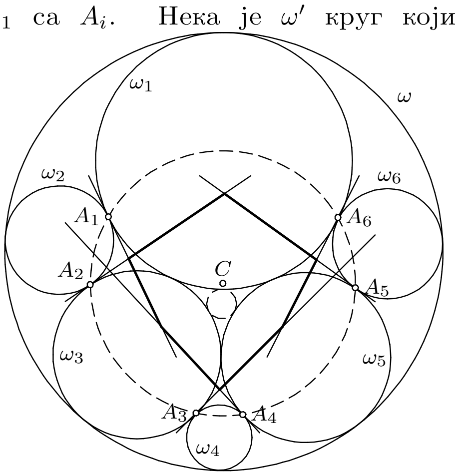
11. Доказаћемо да Ојлеров круг додирује уписани круг k и приписани круг k_a код BC. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA, AB, A' подножје висине из A, и P и Q додирне тачке кругова k и k_a са BC, редом. Знамо да је $A_1P = A_1Q$, што значи да се при инверзији Ψ са центром A_1 и полупречником A_1P кругови k и k_a сликају у себе. Инверзија Ψ слика Ојлеров круг у неку праву l. Покажимо да се l поклапа са правом a' симетричном правој BC у односу на симетралу угла $\angle BAC$ - пошто a' додирује k и k_a, тврђење ће одмах следити. Пре свега, ако су E и O центри Ојлеровог и описаног круга $\triangle ABC$, l је нормално на A_1E, а $A_1E \parallel OA \perp a'$, па је $l \parallel a'$. Осим тога, права a' сече BC у тачки D на симетрали $\angle BAC$, па је довољно показати да Ψ слика A' у D, тј. да је $A_1D \cdot A_1A' = A_1P^2$. Како је $A_1P = \frac{|b-c|}{2}$, $A_1A' = \frac{|b^2-c^2|}{2a}$ и $A_1D = \frac{a|b-c|}{2(b+c)}$, ово се директно проверава.



12. Инверзија са центром у B. Тачке A', C', M', као и K', N', M', су на правој, а A', C', N', K' су на кругу. У шта се слика центар O круга $ACNK$? Нека су B_1 и B_2 подножја тангенти из B на круг $ACNK$. Њихове слике B_1' и B_2' су подножја тангенти из B на круг $A'C'N'K'$, а како је тачка O на кругу BB_1B_2, њена слика O' је на правој $B_1'B_2'$ - прецизније, то је средиште дужи $B_1'B_2'$. Приметимо да се M' налази на полари тачке B у односу на круг $A'C'N'K'$, а то је управо права B_1B_2. Следи да је $\angle OBM = \angle BO'M' = \angle BO'B_1' = 90°$.

13. Како су центри три круга кроз I који се међусобно не додирују колинеарни ако и само ако имају и другу заједничку тачку, довољно је показати да то важи за кругове A_iB_iI. Применимо инверзију са центром I. Нека X' означава слику X. Круг C_i се слика у праву $B_{i+1}'B_{i+2}'$, а права $A_{i+1}A_{i+2}$ се слика у круг $IA_{i+1}'A_{i+2}'$ који додирује $B_i'B_{i+2}'$ и $B_i'B_{i+2}'$. Ова три круга су подударна, па њихови центри P_1, P_2, P_3 чине троугао хомотетичан троуглу $B_1'B_2'B_3'$. Следи да су тачке A_1', A_2', A_3' симетричне тачки I у односу на странице троугла $P_1P_2P_3$ такође темена троугла хомотетичног $B_1'B_2'B_3'$. Закључујемо да се $A_1'B_1', A_2'B_2', A_3'B_3'$ секу у некој тачки J', тј. кругови A_iB_iI сви садрже J.

14. Означимо додирну тачку кругова ω_i и ω_{i+1} са A_i. Нека је ω' круг који се споља додирује са круговима $\omega_1, \omega_3, \omega_5$. Постоји инверзија Ψ која кругове ω и ω' слика у два концикличнa круга; при овој инверзији $\omega_1, \omega_3, \omega_5$, као и $\omega_2, \omega_4, \omega_6$, сликају се у међусобно подударне кругове, па је јасно да се слике тачака A_i налазе на кругу. Како инверзија чува кругове, и полазне тачке A_i су на неком кругу k.



Нека је C центар круга k и нека је t_i унутрашња заједничка тангента кругова ω_i, ω_{i+1}. Показаћемо да је C једнако удаљено од свих правих t_i. Ако је O_i центар круга ω_i, имамо $\triangle CA_iO_i \cong \triangle CA_{i-1}O_i$ ($A_0 = A_6$), па је угао између CA_{i-1} и t_{i-1} једнак углу између CA_i и t_i, одакле следи да је C једнако удаљено од t_{i-1} и t_i за свако i, што смо и желели да покажемо.

15. Нека су $AYBZ, AZCX, AXDY, WCXD, WDYB, WBZC$ стране хексаедра, а A оно теме за које не знамо да је на сфери. Применимо инверзију у односу на W. Тачке B', C', D', X', Y', Z' леже у некој равни π, и осим тога C', X', D'; D', Y', B'; и B', Z', C' су колинеарне у том редоследу. Како је A пресек равни YBZ, ZCX, XDY, тачка A' је други пресек сфера $WY'B'Z', WZ'C'X', WX'D'Y'$. Како се кругови $Y'B'Z', Z'C'X'$, $X'D'Y'$ секу у једној тачки у равни π, та тачка се мора поклапати са A': значи, $A' \in \pi$ и тврђење следи.

16. Применимо инверзију са центром S и квадратом полупречника $SA \cdot SA_1 = SB \cdot SB_1 = SC \cdot SC_1$. Тачке A и A_1, B и B_1, и C и C_1 мењају места, сфера кроз A, B, C, A_1, B_1, C_1 остаје ту где је, а тангентне равни у A_1, B_1, C_1 се сликају у сфере кроз S и A, S и B, S и C које додирују сферу $ABCA_1B_1C_1$. Ове три сфере су нормалне на раван ABC, па им центри леже у равни ABC, из чега закључујемо да све пролазе кроз тачку $\overline{S}$ симетричну тачки S у односу на ABC. Дакле, $\overline{S}$ је слика тачке O. Из $\angle SA_1O = \angle S\overline{S}A = \angle \overline{S}SA = \angle OSA_1$ добијамо $OS = OA_1$ и аналогно $OS = OB_1 = OC_1$.

17. Нека је X' слика X при инверзији са центром M. Права MN' је тангента на круг k' са центром O', а круг кроз M додирује k' у L' и сече MN' у K'; права $K'L'$ сече k' у P', а $N'O'$ сече ML' у Q'. Треба доказати да је $\angle MQ'P' = \angle L'Q'P' = 2\angle K'ML'$.

Нека заједничка тангента у L' сече MN' у Y'. Како су углови над тетивама $K'L'$ и $L'P'$ једнаки (углу $K'L'Y'$), имамо $\angle L'O'P' = 2\angle L'N'P' = 2\angle K'ML'$. Остаје да се докаже да су тачке L', P', O', Q' на кругу. Ово следи из једнакости $\angle O'Q'L' = 90^\circ - \angle L'MK' = 90^\circ - \angle L'N'P' = \angle O'P'L'$ (углови су оријентисани).

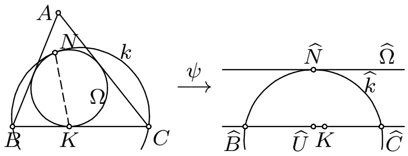
18. Доказаћемо да се пресек P унутрашњих заједничких тангенти кругова $\gamma_1(O_1, r_1)$ и $\gamma_2(O_2, r_2)$ налази на симетрали ℓ угла BAC. Због $KL \parallel BC$, ℓ полови угао KAL.

Нека је $\mathfrak{I}$ композиција симетрије у односу на ℓ и инверзије са центром A и квадратом полупречника $AK \cdot AL$. Ово пресликавање слика K у L. Даље, слике правих KL и AB и круга ω су редом ω, AC и KL, што значи да се и круг γ_1 (који додирује KL, AB и ω) слика у γ_2, и обратно. Одавде закључујемо да је $\angle BAO_1 = \angle CAO_2$. Сада је $\frac{PO_1}{PO_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{AO_1}{AO_2}$, па је AP симетрала угла O_1AO_2, што је управо права ℓ.

19. Нека је k круг кроз B, C који додирује Ω у N'. Желимо да покажемо да су K, M, N' колинеарне. Ово тврђење је тривијално за $AB = AC$, па надаље претпостављамо да је $AC > AB$. Као и обично, означимо са $R, r, \alpha, \beta, \gamma$ полупречинке описаног и уписаног круга и углове $\triangle ABC$, редом.

Имамо $\mathrm{tg}\angle BKM = DM/DK$. Праволинијски израчунавамо $DM = \frac{1}{2}AD = R\sin\beta\sin\gamma$ и $DK = \frac{DC-DB}{2} - \frac{KC-KB}{2} = R\sin(\beta-\gamma) - R(\sin\beta - \sin\gamma) = 4R\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, одакле добијамо $\mathrm{tg}\angle BKM = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{4\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$.

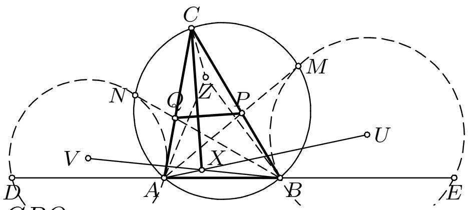
Да бисмо израчунали угао BKN', примењујемо инверзију ψ са центром K и полупречником $\sqrt{BK\cdot CK}$. Уписани круг Ω се слика у праву $\widehat{\Omega}$ паралелну правој $\widehat{B}\widehat{C}$ и на одстојању $\frac{BK\cdot CK}{2r}$ од ње. Тако је тачка $\widehat{N'}$ пројекција средишта $\widehat{U}$ дужи $\widehat{B}\widehat{C}$ на $\widehat{\Omega}$. Следи да је $\mathrm{tg}\angle BKN' = \mathrm{tg}\angle\widehat{B}K\widehat{N'} = \frac{\widehat{U}\widehat{N'}}{\widehat{U}K} = \frac{BK\cdot CK}{r(CK-BK)}$. Лако се проверава да је $KB\cdot KC = bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и $r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, што даје



$$\mathrm{tg}\angle BKN' = \frac{bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}{r(b-c)} = \frac{4R^2\sin\beta\sin\gamma\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cdot 2R(\sin\beta-\sin\gamma)} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}.$$

Према томе, $\angle BKM = \angle BKN'$, тј. тачке K, M, N' су колинеарне одакле је $N' \equiv N$.

20. Означимо са U центар описаног круга $\triangle BME$. Применимо инверзију са центром A и квадратом полупречника $AB\cdot AC$. Тачке B и C се сликају у тачке B' и C' симетричне тачкама C и B у односу на AP, тачке P и M се сликају једна у другу, а E се слика у тачку E' симетричну Q у односу на AP. Према томе, права AU се поклапа са правом која спаја A са центром круга $B'PE'$ (наравно, центри се не сликају један у други!). Видимо да је та права симетрична правој AZ у односу на симетралу угла A, где је Z центар круга описаног око $\triangle CPQ$.



Аналогно се добија да је права BZ симетрична правој која спаја B са центром V круга AND у односу на симетралу угла B. По Чевиној теореми у тригонометријском облику (или по тврђењу о изогонално спрегнутим тачкама), праве симетричне правим AU, BV, CX у односу на симетрале углова A, B, C редом се такође секу у једној тачки, што значи да је права CZ симетрична CX у односу на симетралу угла C. Али Z је центар круга CPQ, одакле следи да права CX садржи висину троугла CPQ, а то смо и желели да докажемо.

Београд, 1999-2011