Додатна настава из математике
Иван Матић

Инверзија

1. Нека су A, B, C и D четири произвољне тачке равни, које не леже на једној правој или на једном кругу. Доказати да је угао између кругова описаних око троуглова ABC и ABD једнак углу међу круговима описаним око троуглова CDA и CDB.

2. Ако круг s додирује кругове s_1 и s_2 у тачкама A и B редом, доказати да права AB пролази кроз центар хомотетије која један од кругова s_1 и s_2 преводи у други.

3. Нека је s полуобим троугла ABC а E и F тачке на правој AB такве да је $CE = CF = s$. Доказати да описани круг троугла CEF додирује споља уписани круг који одговара страници AB.

4. Нека су M, N, P додирне тачке уписаног круга са страницама BC, CA и AB, редом. Доказати да су ортоцентар троугла MNP, центар уписаног и центар описаног круга троугла ABC колинеарне тачке.

5. Над дужима AM, MB и AB једне праве, конструисани су са исте стране полукругови s_1, s_2 и s. Из тачке M праве AB конструисана је нормала MD ($D \in s$) и у криволинијске троуглове ADM и BDM уписани су кругови Σ_1 и Σ_2. Доказати да кругови Σ_1 и Σ_2 имају једнаке полупречнике и да заједничка тангента кругова Σ_1 и s_1 у тачки додира садржи тачку B.

6. Доказати да је свака два круга или круг и праву могуће неком инверзијом превести у две праве (пресецајуће или паралелне) или у два концентрична круга.

7. (Маскеронијеве конструкције) Користећи само шестар извести следеће конструкције:

   (а) Дати су круг k са центром O и две тачке A и B такве да $O \notin AB$. Конструисати пресечне тачке круга k и праве AB.

   (б) У равни су дати круг k са центром O и тачка A. Конструисати тачку A^* инверзну тачки A у односу на круг k.

   (в) Конструисати центар круга који садржи три дате тачке A, B и C.

   (г) Конструисати круг l^* који је слика при инверзији праве l (задате својим двема тачкама A и B) у односу на дати круг k.

   (д) Конструисати круг (или праву) s^* инверзну кругу s у односу на круг k.

Доказати да је користећи један шестар могуће извршити све конструкције које је могуће извести лењиром и шестаром.

8. Нека је ABC троугао, Ω уписани круг, и $\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c$ три круга која су ортогонална на Ω и која пролазе кроз (B, C), (C, A) и (A, B), респективно. Кругови Ω_a и Ω_b се секу поново у тачки C'. Тачке A' и B' се слично дефинишу. Доказати да је полупречник круга описаног око $\Delta A'B'C'$ два пута мањи од полупречника уписаног круга троугла ABC.

9. Нека је ABC правоугли троугао са правим углом код темена A такав да је $\angle B < \angle C$. Тангента у A на описани круг ω сече праву BC у тачки D. Нека је E симетрична тачка тачки A у односу на BC, X подножје нормале из A на BE и Y средиште дужи AX. Нека је Z пресечна тачка круга ω и праве BY. Доказати да је BD тангента на описани круг око троугла ADZ.

10. Висине из темена A, B и C оштроуглог троугла ABC секу наспрамне странице у тачкама D, E и F. Права кроз F паралелна са DE сече праве CA и CB, у тачкама Q и R, редом. Права DE сече AB у тачки P. Доказати да описани круг троугла PQR пролази кроз средиште дужи AB.

Решења и упутства

1. Применити инверзију у односу на тачку A и искористити да је угао између тангенте и тетиве једнак периферијском углу над том тетивом.

2. Нека су O_1, O_2 и O' центри кругова s_1, s_2 и s а O пресечна тачка правих AB и O_1O_2, посматрајмо инверзију у односу на круг са центром O који је ортогоналан на s. Тај круг пресликава A у B и B у A. Такође, круг s_1 ће пресликати у неки круг s_1^* који је нормалан на OO_1 а s додирује у $A^* = B$. Једини такав круг је s_2. Према томе, том инверзијом се s_1 пресликава у s_2, а центар хомотетије која један круг преводи у други поклапа се са центром инверзије.

3. Нека су U и V тачке у којима приписани круг додирује праве CA и CB. Тачке E, U, V и F припадају кругу са центром C. Инверзијом у односу на овај круг, описани круг око троугла ABC се пресликава у EF, а приписани круг је фиксан јер је ортогоналан на круг инверзије.

4. Инверзијом у односу на уписани круг, описани круг троугла ABC се пресликава у Ојлеров круг троугла MNP. Ако је O центар описаног круга троугла ABC, његова слика O^* припада правој IO (I је центар уписаног круга). Међутим, O^* је Ојлеров круг троугла MNP, па он припада Ојлеровој правој тог троугла, и због тога O припада Ојлеровој правој троугла MNP.

5. Применимо инверзију са центром M и одговарајућим (негативним) коефицијентом тако да се A пресликa у B (и, наравно, B у A). Тада се права MD и круг s пресликавају сами у себе, а кругови s_1 и s_2 у тангенте на круг s у тачкама $A^* = B$ и $B^* = A$. Круг Σ_1 се пресликава у Σ_1^* који споља додирује s и праве MD и s_1^*. Означимо са T тачку додира кругова s_1 и Σ_1^* а са T^* њену инверзну слику. Означимо са r, r_1 и r_2, полупречнике, а са O, O_1 и O_2 центре кругова s, s_1 и s_2. Ако је W центар круга Σ_1^*, из троугла OWO_2 закључујемо да је $O_2W = BT^* = \sqrt{4rr_2}$. Сада се лако закључује да је $\Delta AT^*B \sim \Delta T^*BM$, одакле следи да је s_1^* тангента на круг описан око ΔAT^*M. То значи да заједничка тангента кругова s_1 и Σ_1 кроз тачку додира садржи тачку B. Слично као што смо израчунали дужину дужи BT^*, можемо израчунати и дужину дужи RM, где је R додирна тачка круга Σ_2 са правом MD. Добијамо да је $RM = \sqrt{4r\rho_2}$ (ρ_2 је полупречник од Σ_2). Сасвим слично је и $MR^* = \sqrt{4rr_1}$. Пошто је $MR \cdot MR^* = MA \cdot MB$, добијамо да је $4\sqrt{rr_1r_2\rho_2} = 4r_1r_2$, из чега следи да је $\rho_2 = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$. Аналогно се доказује да је $\rho_1 = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$. Тиме је доказано и да је $\rho_1 = \rho_2$.

6. Занимљиво је једино размотрити случај када имамо два круга или праву и круг који се не секу. Лако се доказује да постоје узајамно ортогонални круг k и права p који су нормални на оба ова објекта. Инверзија са центром у једној од пресечних тачака круга k и праве p ће задовољавати постављене услове.

7. (a) Пресечне тачке круга и праве су пресечне тачке круга k са кругом симетричним са k у односу на AB, а тај круг је лако конструисати.

8. A', B' и C' су инверзне тачке тачкама A, B и C, у односу на уписани круг. Оне су управо средишта страница троугла одређеног додирним тачкама уписаног круга.

9. Нека је G дијаметрално супротна тачка тачки A, а H пресечна тачка BD и AE. Тачке G, H и Z су колинеарне ($\Delta BXA \sim \Delta GEA \Rightarrow \Delta BYA \sim GHA$). Применити сада инверзију у односу на ω.

10. Нека је M средиште дужи AB а T пресечна тачка правих PH и CM. Тачка T је слика тачке C при инверзији у односу на круг описан око $ABDE$, па је $PT \perp CM$ (у ствари, да се не лажемо, ово је Брокардова теорема), одакле добијамо да су троуглови FMC и FHP слични. Одатле добијамо да је $PF \cdot FM = FH \cdot FC$. Пошто је $AQBR$ тетиван, имамо да је $AF \cdot FB = QF \cdot FR$. Лако се види да је $AF \cdot FB = FH \cdot FC$, и круг се затвара: $PF \cdot FM = QF \cdot FR$. Према томе, $PQMR$ је тетиван.