Комбинаторика

1. На колико начина се могу поређати у низ бројеви $1, 2, 3, \dots, 2n$ тако да сви парни бројеви буду на парним местима?

2. На колико начина n особа могу да стану у врсту, а да при томе две уочене особе не буду једна поред друге?

3. На колико начина се на шаховску таблу може поставити 8 топова, тако да међу њима не постоје два у истој врсти или истој колони?

4. Одредити број подскупова скупа $\{1, 2, \dots, 2n\}$ у којима једначина $x + y = 2n + 1$ нема решење.

5. Колико има шестоцифрених бројева у чијем је декадном запису бар једна цифра парна?

6. На колико начина можемо изабрати два дисјунктна подскупа из скупа са n елемената?

7. На колико начина се могу 4 ученика распоредити у учионици у којој има 25 столице?

8. Колико се четворочланих подскупова може изабрати у скупу од 25 елемената?

9. Колико има пермутација цифара $0, 1, \dots, 9$ у којима су цифре $0, 1, 2, 3$ четири узастопне цифре (а) у растућем поретку; (б) у произвољном поретку?

10. Колико има пермутација цифара $0, 1, 2, \dots, 9$ у којима између цифара 2 и 3 стоје тачно три друге цифре?

11. Свако поље табле 4×4 је обојено у црно или бело. У једном кораку је дозвољено променити боју 9 поља која се могу покрити квадратом 3×3 или 2×2. Да ли је могуће добити свако бојење поља табле после коначно много корака, ако су на почетку сва поља обојена бело?

12. Доказати да у групи од 367 људи постоје двојица који имају рођендан истог дана.

13. Да ли је увек могће између било којих 100 целих бројева изабрати 15 бројева тако да разлика било која два изабрана броја буде дељива са 7?

14. Доказати да сваки низ од $mn + 1$ различитих природних бројева садржи растући подниз од $m + 1$ бројева или опадајући подниз од $n + 1$ бројева.

15. За сваки реалан број x и сваки природан број q, постоје цео број h и природан број p, $p \leq q$ такви да је $|px - h| < \frac{1}{q}$.

16. Да ли за неки природан број n, број 3^n може да се завршава са 000001?

17. Доказати да постоји природан број n, такав да се у декадном запису броја 3^n може наћи 1999 узастопних нула.

18. У правоугаонику 3×4 је уочено 6 тачака. Доказати да се међу њима могу наћи две тачке са међусобним растојањем не већим од $\sqrt{5}$.

19. У кругу полупречника 1 је повучено неколико тетива. Збир дужина свих тих тетива је већи од 7π. Доказати да неки пречник тог круга сече бар 8 тетива.

20. Од првих 1996 бројева, изабрано је произвољних $998 + n$ бројева $(1 \leq n \leq 998)$. Доказати да је увек могуће наћи $2n$ различитих бројева међу изабраним бројевима, чији је збир $1997n$.

Решења

1. $(n!)^2$.

2. Израчунајмо број распореда у којима су две уочене особе једна до друге. Нека су a и b две уочене особе. Оне могу стајати у редоследу ab или ba. У сваком од тих случајева посматрамо их као једну особу и распоређујемо $n-1$ особа. Дакле, постоји $2(n-1)!$ распореда у којима a и b стоје једна до друге. Број осталих распореда је $n! - 2(n-1)!$.

3. $8!$.

4. Посматрајмо парове $(1, 2n), (2, 2n-1), \dots, (n, n+1)$. При формирању ових скупова из сваког пара можемо изабрати највише по један број. Идући по паровима, можемо изабрати, први, други, или ни један од бројева (тј. имамо 3 могућности). Према томе, има укупно 3^n начина.

5. Шетоцифрених бројева укупно има $10^6 - 10^5$, а оних у којима су све цифре непарне, има 5^6. Решење је $900000 - 5^6 = 884375$.

6. Сваки од n елемената може да бира: хоће ли да буде у првом, другом или ниједном од скупова. Број избора је 3^n. Пошто не рачунамо избор у коме су оба скупа непразна, број дозвољених избора је $3^n - 1$, а пошто нас не занима који је скуп први а који други, решење је $\frac{3^n-1}{2}$.

7. $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$.

8. $\binom{25}{4}$.

9. (а) Слично као у задатку 2, решење је $7!$.

   (б) $7! \cdot 4!$.

10. Има укупно 13 операција, а тиме и 2^{13} могућих бојења која се на тај начин могу добити. Како је укупан број конфигурација једнак 2^{16}, не могу се добити сва бојења.

11. Свака година има највише 366 дана, и применимо Дирихлеов принцип.

12. Има укупно 7 различитих остатака при дељењу са 7, па ако би у свакој класи било по 14 бројева, могли бисмо да имамо највише $7 \cdot 14 = 98$ бројева. Пошто имамо 100 бројева, постоји 15 бројева у истој класи. Разлика свака два од њих је дељива са 7.

13. Нека је a_i дати низ. Претпоставимо супротно. Означимо са l_i^+ и l_i^-, редом, дужине најдужег растућег и најдужег опадајућег подниза који почињу чланом a_i. Посматрајмо пресликавање f :

$\{a_i : 1 \le i \le mn+1\} \to \{1,2,\ldots,m\} \times \{1,2,\ldots,n\}$ дефинисано са $f(a_i) = (l_i^+, l_i^-)$. Овим пресликавањем сваком броју a_i придружујемо уређен пар (l_i^+, l_i^-). Лако се доказује да различитим елементима a_i придружујемо различите уређене парове. Пошто има mn уређених парова а $mn+1$ елемената низа, то је немогуће. Према томе, претпоставка је нетачна и постоји растући подниз дужине бар $m+1$, или опадајући подниз дужине $n+1$.

14. Посматрајмо бројева $\{0\}, \{x\}, \ldots, \{qx\}$. Сви ови бројеви су из скупа $[0,1)$. Према Дирихлеовом принципу бар два броја припадају једном од скупова $\left[\frac{i}{q}, \frac{i+1}{q}\right)$, при чему је $0 \le i \le q-1$. Нека су то $\{kx\}$ и $\{lx\}$. Тада је $-\frac{1}{q} \le \{kx\} - \{lx\} \le \frac{1}{q}$, тј. $-\frac{1}{q} \le kx - lx - [kx] + [lx] \le \frac{1}{q}$. Стављањем $p = (k-l)$ и $h = [kx] - [lx]$ (односно $p = (l-k), h = [lx] - [kx]$ у случају $l > k$) добијамо тражено тврђење.

15. Од бројева $1, 3, 3^2, \ldots, 3^{10^6}$ два дају исти остатак при дељењу са 10^6. Њихова разлика је $3^n - 3^m$ и за њу важи $10^6 | 3^n - 3^m = 3^m(3^{n-m} - 1)$, па $10^6 | 3^{n-m} - 1$, а то је требало доказати.

16. Правоугаоник се издели на 5 делова од којих су три петоуглови са страницама $1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$ а два дела су половине тог петоугла. Докаже се да је дијаметар сваког од тих скупова $\sqrt{5}$, и по Дирихлеовом принципу најмање две тачке припадају истом делу.

17. За сваку тетиву посматрамо мањи лук и њему централно симетрични лук. Пречник са крајем на неком од та два лука сече ту тетиву. Пошто је дужина сваког лука већа од дужине одговарајуће тетиве, дужина свих лукова је већа од $2 \cdot 7\pi = 14\pi$, а то значи да је нека тачка на кругу покривена са бар 8 лукова. Пречник са крајем у тој тачки сече 8 тетива.

18. Посматрајмо парове $(1, 1996), (2, 1995), \ldots, (998, 999)$. Збир бројева у сваком пару је 1997. Ако изаберемо $998+n$ бројева, закључујемо да смо из најмање n од уочених парова изабрали оба броја. Збир $2n$ бројева из тих n парова је $1997n$.