Разни приступи решавању комбинаторног проблема

Осврнућемо се на седам различитих решења (прва 3 су елементарана, која се могу радити и у редовној настави, док су следећа 3, помоћу принципа укључења и искључења, рекурентних веза и функција генератрисе, за оне ученике који би хтели више да сазнају, односно за рад на додатној настави – веома је битно да они виде да има и других знања која излазе ван оквира редовног школског програма и последње решење је програмерско) следећег проблема из уџбеника "Дискретна математика" Драгоша Цветковића и Слободана Симића (задатак 18. са стране 60). Након тога ћемо задати сличан проблем, на коме се могу утврдити стечена знања.

1. Колико има природних бројева мањих од милион (10^6) у којима се јавља цифра 8?

Урадићемо поопштење за бројеве мање од 10^n и тражени број бројева ћемо означити са a_n. Скуп цифара је $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ је скуп цифара без осмице. Бројевима који имају $k < n$ цифара дописаћемо на почетку $n - k$ нула и тај начин смо све бројеве мање од 10^n (укључујући и 0) свели на уређене n–торке елемената из C (варијације са понављањем од n елемената скупа C).

<u>Решење I</u>: Бројева са тачно k осмица има $\binom{n}{k} \cdot 9^{n-k}$: на $\binom{n}{k}$ начина можемо одабрати тих k места на којима су осмице, а на осталих $n - k$ места може бити било која од осталих цифара, односно ту се налази цифра из скупа S и сваку од њих можемо одабрати на 9 различитих начина (по принципу производа све можемо одабрати на 9^{n-k} начина). Тражени бројеви могу имати $1, 2, \ldots, n$ осмица, те по принципу збира добијамо да их укупно има $a_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 9^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 9^{n-k} - 9^n = (9+1)^n - 9^n = 10^n - 9^n$.

<u>Решење II</u>: Уколико је прва цифра 8 слева на првом месту, на осталим местима може бити било која цифра (из $|C| = 10$), па таквих бројева има 10^{n-1}. Уколико је прва цифра 8 слева на другом месту, на првом месту може бити било која цифра из S ($|S| = 9$), 8 је на другом, а на осталим местима може бити било која цифра, па таквих бројева има $9 \cdot 1 \cdot 10^{n-2}$. ... Уколико је прва цифра 8 слева на k–том месту, на првих $(k-1)$ места може бити било која цифра из S, 8 је на k–том, а на осталим местима може бити било која цифра, па таквих бројева има $9^k \cdot 1 \cdot 10^{n-k-1}$. ... Ако је 8 само на последњем месту онда таквих бројева има 9^{n-1}. Како су ови догађаји дисјунктни по принципу збира добијамо да тражених бројева има $a_n = 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9^{n-1} = (10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-2} + \ldots + 9^{n-1}) \cdot (10 - 9) = 10^n - 9^n$.

<u>Решење III</u> (Помоћу комплемента): Укупно природних бројева мањих од 10^n (укључујући и 0) има тачно 10^n - колико и варијација са понављањем скупа C од n елемената. Бројева мањих од 10^n који не садрже цифру 8 (укључујући и 0) има тачно 9^n - колико и варијација са понављањем скупа S од n елемената. Разлика $10^n - 9^n$ представља број природних бројева са највише n цифара, код којих се, када су написани у декадном систему, јавља цифра 8, тј. $a_n = 10^n - 9^n$.

<u>Решење IV</u> (Принцип укључења и искључења): Означимо са A_i скуп n–тоцифрених бројева који имају цифру 8 на i–том месту (за разлику од решења II, овде то није прво појављивање цифре 8, него било које, тако да скупови A_i нису дисјунктни). $|A_i| = 10^{n-1}$ јер на i–том месту имамо фиксирану цифру 8, а на сваком од осталих можемо узети произвољну цифру. За $i \neq j$ је $|A_i \cap A_j| = 10^{n-2}$ (слично на i–том и j–том месту имамо осмице, а на осталим су произвољне цифре). ... Како је $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{\underbrace{\overline{88\ldots8}}_{n}\}$ имамо да је $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = 1$. Када ово све уврстимо у формулу укључења и искључења и са обзиром на чињеницу да t скупова чији пресек тражимо можемо одабрати на $\binom{n}{t}$ начина добијамо:

$$\begin{aligned}
a_n &= |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \\
&= \binom{n}{1} \cdot 10^{n-1} - \binom{n}{2} \cdot 10^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot 10^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \cdot 1 \\
&= 10^n - (\binom{n}{0} \cdot 10^n - \binom{n}{1} \cdot 10^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 10^{n-2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 1) = 10^n - (10-1)^n = 10^n - 9^n.
\end{aligned}$$

Решење V (Помоћу рекурентних низова): Нађимо везу броја $(n+1)$–цифрених бројева који задовољавају услов задатка, a_{n+1}, и n–тоцифрених, a_n. Ако се у последњих n цифара налази цифра 8 (таквих бројева има a_n) онда за нову, $(n+1)$–ву, можемо узети било коју цифру из C, тј. таквих бројева има $10 \cdot a_n$. Ако се у последњих n цифара не налази цифра 8 (таквих бројева има 9^n – варијације скупа S) онда $(n+1)$–ва мора бити 8, тј. таквих бројева има $1 \cdot 9^n$. Тако смо дошли до нехомогене линеарне рекурентне везе

$$a_{n+1} = 10a_n + 9^n, \quad \text{са почетним условом } a_1 = 1 \tag{$*$}$$

(једноцифрених бројева који садрже цифру 8 има само један: 8). Ако у $(*)$ заменимо свако n са $n+1$ добијамо $a_{n+2} = 10a_{n+1} + 9^{n+1}$ и ако од ове једначине одузмемо $(*)$ помножену са 9, добијамо линеарну хомогену рекурентну везу

$$a_{n+2} - 19a_{n+1} + 90a_n = 0, \quad \text{са почетним условима } a_1 = 1,\ a_2 = 19 \tag{$**$}$$

(други почетни услов добијамо из $(*)$ за $n = 1$ или простим пребројавањем: 8,18,28,..., 78,80,81,82,..., 89,98 – има их 19). Карактеристична једначина за $(**)$ је $t^2 - 19t + 90 = 0$ и њене нуле су $t_1 = 10$ и $t_2 = 9$, па је опште решење једначине $(**)$, а самим тим и $(*)$, $a_n = C_1 \cdot 10^n + C_2 \cdot 9^n$, где константе C_1 и C_2 одређујемо из почетних услова: $a_1 = 1 = 10C_1 + 9C_2$ и $a_2 = 19 = 100C_1 + 81C_2$. Решавањем овог система добијамо $C_1 = 1$ и $C_2 = -1$, односно тражених бројева има $a_n = 10^n - 9^n$.

Решење VI (Помоћу функција генератрисе): За варијације са понављањем скупа C у којима се један елемент (8) појављује бар једанпут имамо експоненцијалну функцију генератрисе (први фактор одговара цифри 8, а други је за осталих 9 цифара)

$$H(t) = \left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots\right)^9 = (e^t - 1) \cdot e^{9t} = e^{10t} - e^{9t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(10t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(9t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (10^k - 9^k) \frac{t^k}{k!}$$

(овде смо користили и развој експоненцијалне функције у ред: $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$). Број варијација n–те класе је коефицијент уз $\frac{t^n}{n!}$, тј. решење задатка је $a_n = 10^n - 9^n$.

Решење VII (Компјутерски програм):

```
program brojanje;
var n,c: integer;
    m,b,s: longint;
    p: Boolean;
begin
    writeln('Program trazi koliko ima prirodnih brojeva manjih od 10^n u kojima se javlja cifra 8.');
    write('Unesite broj n');
    readln(n);
    s:=0;
    for m:=1 to 10^n-1 do
        begin
        b:=m; p:=false;
        repeat
        c:=b mod 10;
        if c=8 then p:=true
               else b:=b div 10;
        until (b=0) or p;
        if p then s:=s+1;
        end;
    writeln('Trazenih brojeva ima ',s);
```

2. Колико има природних бројева са највише n цифара у којима се појављују цифре 3 или 5?
Решење: Потпуно аналогно само је сада $S = \{0, 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ и $|S| = 8$, па је резултат $a_n = 10^n - 8^n$.