Language: Serbian

Четвртак, 4. мај 2017.

1. Одредити све уређене парове природних бројева (x, y) такве да важи

$$x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2.$$

2. Нека је Γ описани круг оштроуглог троугла ABC у коме је $AB < AC$. Означимо са t_B и t_C редом тангенте на круг Γ у тачкама B и C, а са L њихову тачку пресека. Права кроз B паралелна правој AC сече t_C у тачки D, а права кроз C паралелна правој AB сече t_B у тачки E. Описани круг троугла BDC сече праву AC у тачки T између A и C. Описани круг троугла BEC сече праву AB у тачки S тако да је B између A и S.

Доказати да се праве ST, BC и AL секу у једној тачки.

3. Наћи све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да

$$n + f(m) \ \text{ дели } \ f(n) + nf(m)$$

за све $m, n \in \mathbb{N}$. (Са $\mathbb{N}$ означавамо скуп природних бројева.)

4. Око округлог стола седи $n > 2$ ученика. У почетку сваки ученик има тачно једну бомбону. У сваком кораку, сваки ученик бира једну од следеће две операције:

(i) даје једну своју бомбону ученику лево од себе или ученику десно од себе;

(ii) дели све своје бомбоне на два скупа (не обавезно непразна) и један скуп даје ученику лево, а други ученику десно од себе.

Све операције у једном кораку извршавају се истовремено.

Распоред бомбона зовемо *достижним* ако се може добити у коначно много корака.

Колико има достижних распореда?

(Два распореда су различита ако бар један ученик у њима има различит број бомбона.)

Време за рад: 4 сата и 30 минута

Сваки задатак вреди 10 бодова