35. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Хонг Конг, 9.–22. јул 1994.

Први дан
13. јул 1994.

1. Нека су m и n природни бројеви и нека су $a_1, a_2, \ldots, a_m$ различити елементи скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ такви да, кад год је $a_i + a_j \leq n$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$, постоји k такво да је $a_i + a_j = a_k$. Доказати да је

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

(Француска)

2. Нека је ABC троугао са $AB = AC$. Претпоставимо да:

(i) M је средиште дужи BC и O је тачка праве AM таква да је $\sphericalangle ABO = 90°$;

(ii) Q је произвољна тачка дужи BC различита од B и C;

(iii) E и F су тачке на правим AB и AC редом такве да су тачке E, Q, F различите и колинеарне.

Доказати да је OQ нормално на EF ако и само ако је $QE = QF$.
(Јерменија/Аустралија)

3. За сваки природан број k, нека $f(k)$ означава број елемената скупа $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ чија репресентација у бази са основом 2 има тачно три јединице.

(а) Доказати да за сваки природан број m постоји бар један природан број k такав да је $f(k) = m$.

(б) Одредити све природне бројеве m за које постоји тачно једно k са $f(k) = m$. *(Румунија)*

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

35. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Хонг Конг, 9.–22. јул 1994.

Други дан
14. јул 1994.

4. Одредити све парове (m, n) природних бројева за које је $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ цео број. *(Аустралија)*

5. Нека је S скуп свих реалних бројева строго већих од -1. Наћи све функције $f : S \to S$ које задовољавају следеће услове:

(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ за све $x, y \in S$;

(ii) $f(x)/x$ строго расте за $-1 < x < 0$ и за $0 < x$.

(Велика Британија)

6. Доказати да постоји скуп A природних бројева са следећим својством: за произвољан бесконачан скуп S простих бројева постоје два природна броја $m \in A$ и $n \notin A$ од којих је сваки производ k различитих елемената из S за неко $k \geq 2$. *(Финска)*

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена