# 12. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

**Пловдив, Бугарска – 9. мај 1995.**

**1.** Наћи вредност израза $(\ldots(((2*3)*4)*5)*\ldots)*1995$, где је $x*y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

*(Македонија)*

**2.** Нека се кругови $c_1(O_1, r_1)$ и $c_2(O_2, r_2)$, $r_2 > r_1$, секу у тачкама $A$ и $B$, при чему је $\sphericalangle O_1AO_2 = 90^\circ$. Права $O_1O_2$ сече $c_1$ у $C$ и $D$, а $c_2$ у $E$ и $F$ (при чему је $C - E - D - F$). Права $BE$ сече круг $c_1$ у $K$, а праву $AC$ у $M$, док права $BD$ сече круг $c_2$ у $L$, а праву $AF$ у $N$. Доказати да је

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{KE}{KM} \cdot \frac{LN}{LD}.$$

*(Грчка)*

**3.** Дати су природни бројеви $a$ и $b$ такви да је $a > b$ и $2 \mid a+b$. Доказати да су решења једначине

$$x^2 - (a^2 - a + 1)(x - b^2 - 1) - (b^2+1)^2 = 0$$

природни бројеви од којих ниједан није потпун квадрат. *(Албанија)*

**4.** Нека је $n$ природан број и $S$ скуп свих тачака $(x, y)$, где су $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Нека је $T$ скуп свих квадрата чија темена припадају скупу $S$. Означимо са $a_k$ ($k \geqslant 0$) број парова тачака из $S$ које су темена тачно $k$ квадрата из $T$. Доказати да је $a_0 = a_2 + 2a_3$. *(Југославија)*

*Време за рад 270 минута.*
*Сваки задатак вреди 10 поена.*