36. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Торонто, Канада – среда, 19. јул 1995.

1. Нека су A, B, C, и D различите тачке на правој, тим редоследом. Кругови над пречницима AC и BD секу се у X и Y. Нека је O произвољна тачка на правој XY, ван праве AD. Права CO поново сече круг над пречником AC у M, а BO поново сече круг над BD у N. Доказати да се праве AM, DN и XY секу у једној тачки. *(Бугарска)*

2. Позитивни реални бројеви a, b и c су такви да је $abc = 1$. Доказати неједнакост

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

(Русија)

3. Одредити све природне бројеве $n > 3$ за које постоји n тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ у равни које задовољавају следеће услове:

(i) никоје три не леже на истој правој;

(ii) Постоје реални бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_n$ такви да је површина $\triangle A_i A_j A_k$ једнака $p_i + p_j + p_k$ за $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$. *(Чешка)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута

Сваки задатак вреди 7 поена

36. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Торонто, Канада – четвртак, 20. јул 1995.

4. Позитивни реални бројеви $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ су такви да је $x_0 = x_{1995}$ и

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$$

за $i = 1, 2, \ldots, 1995$. Наћи највећу могућу вредност броја x_0. *(Пољска)*

5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао у коме је $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ и $\sphericalangle BCD = \sphericalangle EFA = 60°$. Тачке G и H унутар шестоугла су такве да су углови AGB и DHE једнаки $120°$. Доказати да је

$$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF.$$

(Нови Зеланд)

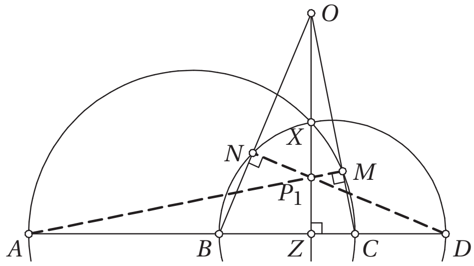
6. Дат је непаран прост број p. Одредити број p-елементних подскупова A скупа $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ таквих да је збир свих елемената у A дељив са p. *(Пољска)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Означимо $Z = AD \cap XY$. Јасно је да је $XZ \perp AD$. Нека праве AM и DN редом секу праву XY у тачкама P_1 и P_2. Из сличности троуглова OZC и AZP_1 добијамо $ZP_1 = \frac{ZA \cdot ZC}{ZO} = \frac{ZX^2}{ZO}$. Аналогно добијамо $ZP_2 = \frac{ZX^2}{ZO}$, одакле је $P_1 \equiv P_2$.



2. Ако означимо $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$, лева страна неједнакости постаје $L = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$, при чему је $xyz = 1$. Коши-Шварцова неједнакост даје

$$[(y+z)+(z+x)+(x+y)] \cdot L \geqslant (x+y+z)^2, \quad \text{тј.} \quad L \geqslant \frac{x+y+z}{2}.$$

Најзад, по неједнакости између средина важи $\frac{x+y+z}{2} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$, што завршава доказ. Једнакост важи само за $x = y = z = 1$, тј. $a = b = c = 1$.

<u>*Друго решење.*</u> Општија неједнакост

$$f_k(a,b,c) = \frac{a^k}{b+c} + \frac{b^k}{c+a} + \frac{c^k}{a+b} \geqslant \frac{3}{2} \quad \text{за} \quad a,b,c > 0,\ abc = 1$$

се једноставно доказује помоћу Мјурхедове неједнакости за $k \geqslant 1$ или $k \leqslant -2$. Заиста, сменом $a = x^3$, $b = y^3$ и $c = z^3$, хомогенизацијом и свођењем на заједнички именилац она се своди на $T_{3k+6,0,0} + 2T_{3k+3,3,0} + T_{3k,3,3} \geqslant 3T_{k+5,k+2,k-1} + T_{k+2,k+2,k+2}$.

<u>*Напомена.*</u> За $-2 < k < 1$ вредност израза f_k може да буде произвољно мала. Заиста, $f_k(t,t,t^{-2}) \to 0$ када $t \to \infty$ (за $-\frac{1}{2} < k < 1$), односно када $t \to 0$ (за $-2 < k < -\frac{1}{2}$), и $f_{-\frac{1}{2}}(t,1,t^{-1}) \to 0$ када $t \to \infty$.

3. За $n = 4$ услове задатка задовољавају темена јединичног квадрата $A_1A_2A_3A_4$ и бројеви $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{6}$. Показаћемо да за $n = 5$ (и самим тим за све $n \geqslant 5$) нема решења.

Претпоставимо да тачке A_i и бројеви p_i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ задовољавају услове. Површину $\triangle A_iA_jA_k$ означавамо са $S_{ijk} = p_i + p_j + p_k$ $(1 \leqslant i < j < k \leqslant 5)$. Приметимо да сви бројеви p_i морају да буду различити. Заиста, ако је нпр. $p_4 = p_5$, онда је $S_{124} = S_{125}$ и $S_{234} = S_{235}$, одакле следи да је права A_4A_5 паралелна правим A_1A_2 и A_2A_3, а то је немогуће јер тачке A_1, A_2, A_3 нису колинеарне.

Видимо да, ако је четвороугао $A_iA_jA_kA_l$ конвексан, важи $S_{ijk} + S_{ikl} = S_{ijl} + S_{jkl}$ и одатле $p_i + p_k = p_j + p_l$. Посматрајмо конвексни омотач $\mathscr{M}$ тачака A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Разликујемо три случаја.

(i) $\mathscr{M}$ је петоугао $A_1A_2A_3A_4A_5$. Из конвексности четвороуглова $A_1A_2A_3A_4$ и $A_1A_2A_3A_5$ следи $p_1+p_3=p_2+p_4$ и $p_1+p_3=p_2+p_5$, дакле $p_4=p_5$, што је немогуће.

(ii) $\mathscr{M}$ је четвороугао, рецимо $A_1A_2A_3A_4$. Без смањења општости, тачка A_5 лежи унутар $\triangle A_1A_3A_4$. Тада је и четвороугао $A_1A_2A_3A_5$ конвексан, па као у случају (i) добијамо $p_4=p_5$.

(iii) $\mathscr{M}$ је троугао, рецимо $A_1A_2A_3$. Тада из $S_{123}=S_{124}+S_{134}+S_{234}=S_{125}+S_{135}+S_{235}$ опет добијамо $p_4=p_5$.

4. Дата једнакост је еквивалентна са $(2x_i-x_{i-1})(x_ix_{i-1}-1)=0$, што значи да је $x_i=\frac{1}{2}x_{i-1}$ или $x_i=\frac{1}{x_{i-1}}$. Показујемо индукцијом по $n\geqslant 0$ да важи

$$x_n=2^{k_n}x_0^{e_n}\quad \text{за неко } k_n\in\{-n,-n+1,\dots,n\}\quad \text{и}\quad e_n=(-1)^{n-k_n}.$$

Ово је тривијално за $n=0$. Ако важи за неко n, онда је $x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n=2^{k_n-1}x_0^{e_n}$ (тј. $k_{n+1}=k_n-1$ и $e_{n+1}=e_n$) или $x_{n+1}=\frac{1}{x_n}=2^{-k_n}x_0^{-e_n}$ (тј. је $k_{n+1}=-k_n$ и $e_{n+1}=-e_n$).

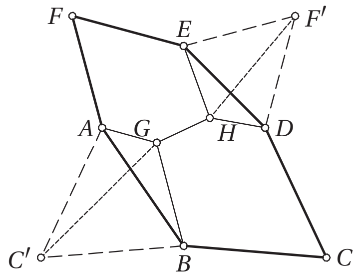
Према томе, $x_0=x_{1995}=2^{k_{1995}}x_0^{e_{1995}}$. Ако је $e_{1995}=1$, онда је k_{1995} непарно, али тада $x_{1995}\neq x_0$. Зато мора бити $e^{1995}=-1$, а тада је $x_0^2=2^{k_{1995}}\leqslant 2^{1994}$, тј. $x_0\leqslant 2^{997}$.

Вредност $x_0=2^{997}$ се достиже за низ $2^{997},2^{996},\dots,2^1,2^0,2^0,2^1,\dots,2^{996},2^{997}$.

<u>*Друго решење.*</u> Доказаћемо да постоји n такво да је $x_n=1$. Како је $|\log_2 x_{i+1}|\leqslant|\log_2 x_i|+1$ за све i, у случају $n\leqslant 997$ ће следити $x_0\leqslant 2^{997}$, а у случају $n\geqslant 998$, $x_0=x_{1995}\leq 2^{997}$.

Претпоставимо супротно. Поделимо скуп $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ на интервале $\dots\cup[\frac{1}{8},\frac{1}{4})\cup[\frac{1}{4},\frac{1}{2})\cup[\frac{1}{2},1)\cup(1,2]\cup(2,4]\cup(4,8]\cup\dots$. Ако ове интервале обојимо наизменично црно и бело, видимо да се x_i и x_{i+1} увек налазе у интервалима различитих боја, па тако x_0 и x_{1995} не могу бити у истом интервалу, контрадикција.

5. Пошто су троуглови BCD и EFA једнакостранични, права BE је оса симетрије четвороугла $ABDE$. Нека су C' и F' редом тачке симетричне тачкама C и F у односу на праву BE. Птоломејева неједнакост у четвороуглу $AGBC'$ даје $GA+GB\geqslant GC'$. Слично је $HD+HE\geqslant HF'$, па тако имамо



$$AG+GB+GH+DH+HE\geqslant C'G+GH+HF'\geqslant C'F'=CF.$$

Једнакост важи ако и само ако су тачке G и H на правој $C'F'$ и четвороуглови $AGBC'$ и $DHEF'$ су тетивни, тј. $\sphericalangle AGB=\sphericalangle DHE=120^\circ$.

Напомена. Под условима $\sphericalangle AGB = \sphericalangle DHE = 120^\circ$ неједнакости $GA+GB \geqslant GC'$ и $HD+HE \geqslant HF'$ постају једнакости. За тврђење задатка ти услови су сувишни.

6. Нека је C_p фамилија свих p-елементних подскупова скупа M. Са $|A|$ и $\sigma(A)$ означавамо редом број и збир елемената скупа A. Поделимо скуп M на подскупове $M_1 = \{1,2,\dots,p\}$ и $M_2 = \{p+1, p+2, \dots, 2p\}$.

Дефинишимо пресликавање $T : C_p \to C_p$ са

$$T(A) = \{x_p + 1 \mid x \in A \cap M_1\} \cup \{A \cap M_2\},$$

где x_p означава остатак броја x при дељењу са p. За $A \in C_p$ једноставна индукција даје $\sigma(T^i(A)) = \sigma(A) + ik \pmod p$ за $i = 0,1,\dots,p-1$, где је $k = |A \cap M_1|$. Како за $A \notin \{M_1, M_2\}$ важи $p \nmid k$, подскупови $A, T(A), \dots, T^{p-1}(A)$ су тада међусобно различити и тачно један од њих има збир елемената дељив са p.

Како су $\sigma(M_1)$ и $\sigma(M_2)$ дељиви са p, а фамилија $C_p \setminus \{M_1, M_2\}$ се може поделити на орбите облика $\{A, T(A), \dots, T^{p-1}(A)\}$, тражени број је $\frac{1}{p}(|C_p| - 2) + 2 = \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right) + 2$.

Друго решење. Нека је $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p}$ за неко k, $1 \leqslant k \leqslant p-1$. Знамо да је $\prod_{i=1}^{2p}(x - \omega_k^i) = (x^p - 1)^2 = x^{2p} - 2x^p + 1$, па поређењем коефицијената уз x^p добијамо

$$\sum_{\{i_1,\dots,i_p\} \subset M} \omega_k^{i_1+\dots+i_p} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \omega_k^i = 2,$$

где је a_i број подскупова $\{i_1, \dots, i_p\} \subset M$ за које је $i_1 + \dots + i_p \equiv i \pmod p$. Посматрајмо полином $q(x) = -2 + \sum_{i=0}^{p-1} a_i x^i$. Како је $q(\omega_k) = 0$ за $1 \leqslant k \leqslant p-1$, следи да $1 + x + \dots + x^{p-1} \mid q(x)$, па мора бити $q(x) = c(1 + x + \dots + x^{p-1})$ за неку константу c. Према томе, $a_0 - 2 = a_1 = \dots = a_{p-1}$, што због $a_0 + \dots + a_{p-1} = \binom{2p}{p}$ даје $a_0 = \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right) + 2$.