13. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Бакау, Румунија – 30. април 1996.

1. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC. Ако су R и r редом полупречници описаног и уписаног круга троугла ABC, доказати да је

$$OT \leqslant \sqrt{R(R-2r)}.$$

(Грчка)

2. Нека је $p>5$ прост број и $X=\{p-n^2 \mid n\in\mathbb{N},\ n^2<p\}$. Доказати да X садржи два различита елемента x, y тако да је $x\neq 1$ и $x \mid y$. *(Албанија)*

3. У конвексном петоуглу $ABCDE$, тачке M, N, P, Q, R су средишта страница AB, BC, CD, DE, EA редом. Ако се дужи AP, BQ, CR, DM секу у једној тачки, доказати да и дуж EN садржи ту тачку. *(Југославија)*

4. Доказати да постоји подскуп A скупа $\{1,2,3,\ldots,2^{1996}-1\}$ који има следеће особине:

(i) $1\in A$ и $2^{1996}-1\in A$;

(ii) сваки елемент из $A\setminus\{1\}$ је збир два (не обавезно различита) елемента из A;

(iii) A нема више од 2012 елемената. *(Румунија)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. По Лајбницовој теореми је $3R^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 = TA^2 + TB^2 + TC^2 + 3TO^2$, па како је $TA^2 + TB^2 + TC^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$, добијамо $OT^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

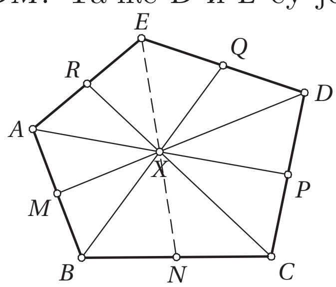
Остаје да се покаже да је $2Rr \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$. Знамо да је $R = \frac{abc}{4P}$ и $r = \frac{2P}{a+b+c}$, па је $2Rr = \frac{abc}{a+b+c} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$ јер је по неједнакости између средина $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 9abc$.

Напомена. Задатак показује да је $OT \leqslant OI$, где је I центар уписаног круга $\triangle ABC$. У ствари, ако $\triangle ABC$ није једнакостраничан, I лежи унутар круга над пречником TH (наиме, $\overrightarrow{IT} \cdot \overrightarrow{IH} = -\frac{2}{3}r(R-2r) < 0$ - докажите!), па и одатле следи $OT < OI$.

2. Нека је $n^2 < p < (n+1)^2$. Ако је $p - n^2 > 1$, узмимо $x = p - n^2$. Јасно је да $x \mid p - (x-n)^2$. Како су бројеви $n^2 + n$ и $n^2 + 2n$ сложени, мора бити $x \leqslant 2n - 1$ и $x \neq n$, тј. $0 < |x - n| < n$, па можемо узети $y = p - (x-n)^2$.

Ако је $p - n^2 = 1$, узимамо $x = p - (n-1)^2 = 2n$ и $y = p - 1^2 = n^2$: број n мора бити паран, па $2n \mid n^2$.

3. Нека је X пресечна тачка правих AP, BQ, CR и DM. Тачке D и E су једнако удаљене од праве BX, па је $P_{EXB} = P_{BXD}$. Аналогно је $P_{BXD} = P_{DXA}$, $P_{DXA} = P_{AXC}$ и $P_{AXC} = P_{CXE}$. Закључујемо да је $P_{BXE} = P_{CXE}$. То значи да су тачке B и C једнако удаљене од праве EX, па та права пролази кроз N (или је $BC \parallel EN$, а то је немогуће јер је X унутар $\triangle ACE$).



4. Са $\delta_0(x)$ и $\delta_1(x)$ ћемо означавати редом бројеве нула и јединица у бинарном запису природног броја x. Доказаћемо индукцијом по n да постоји скуп $A_n \subset \mathbb{N}$ који задовољава (ii) такав да $1, 2^n - 1 \in A_n$ и $|A_n| \leqslant n - 2 + \delta_0(n) + 2\delta_1(n)$. Пошто је $\delta_0(1996) = 4$ и $\delta_1(1996) = 7$ $(1996 = 11111001100_2)$, одавде следи тврђење задатка.

За $n = 1$ тврђење важи. Претпоставимо да је $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. За скуп A_n довољно је узети $A_k \cup \{2^{k+1} - 2, 2^{k+2} - 2^2, \ldots, 2^{2k} - 2^k, 2^{2k} - 1\}$. Заиста, лако се види да овај скуп задовољава услов (ii) и има $2k - 1 + \delta_0(k) + 2\delta_1(k) = n - 2 + \delta_0(n) + 2\delta_1(n)$ елемената.

Нека је сада $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Слично као у претходном случају, за скуп A_n можемо узети скуп $A_k \cup \{2^{k+1} - 2, 2^{k+2} - 2^2, \ldots, 2^{2k+1} - 2^{k+1}, 2^{k+1} - 1, 2^{2k+1} - 1\}$.

Друго решење. Дајемо побољшање горње конструкције које оцену 2012 спушта на 2010.

Ако постоји скуп A са k елемената $1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_k = m$ који задовољава (ii), онда постоји скуп B са $m + k - 1$ елемената који задовољава (ii) и садржи бројеве $2^{a_i}-1$, $i=1,\ldots,k$. Доказ индукцијом по k. По индуктивној претпоставци постоји скуп B' са својством (ii) који садржи бројеве $2^{a_i}-1$, $i=1,\ldots,k-1$. Нека је $a_k=a_r+a_s$. За индуктивни корак $(k-1)\to k$ допунимо B' елементима $2(2^{a_r}-1)$, $2^2(2^{a_r}-1),\ldots,2^{a_s}(2^{a_r}-1)$ и $2^{a_k}-1=2^{a_s}(2^{a_r}-1)+(2^{a_s}-1)$.

Скуп $\{1,2,4,8,16,17,33,66,83,166,332,498,499,998,1996\}$ има 15 елемената и задовољава (ii). По претходном, може се конструисати тражени скуп са $1996+15-1=2010$ елемената који садржи 1 и $2^{1996}-1$.