

37. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Индија – Мумбај, 5.–17. јул 1996.

Први дан
10. јул 1996.

1. Нека је $ABCD$ правоугаона табла, $AB = 20$, $BC = 12$. Табла је разложена на 20×12 јединичних квадрата. Нека је r природан број. Новчић може да се премести из једног квадрата у други ако и само ако је растојање њихових центара једнако \sqrt{r} . Задатак је наћи низ премештања који преводи новчић из квадрата коме је A једно теме у квадрат коме је B једно теме.
- (а) Доказати да се задатак не може извршити ако је r дељиво са 2 или 3.
- (б) Доказати да се задатак може извршити ако је $r = 73$.
- (в) Може ли се задатак извршити ако је $r = 97$? (Финска)

2. Нека је P унутрашња тачка троугла ABC таква да је

$$\sphericalangle APB - \sphericalangle ACB = \sphericalangle APC - \sphericalangle ABC.$$

Нека су D , E центри кругова уписаних у троуглове APB , APC , редом. Доказати да се AP , BD и CE секу у једној тачки.

(Канада)

3. Нека је \mathbb{N}_0 скуп ненегативних целих бројева. Наћи све функције $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ такве да је

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

за све $m, n \in \mathbb{N}_0$.

(Румунија)

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

37. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Индија – Мумбај, 5.–17. јул 1996.

Други дан
11. јул 1996.

4. Природни бројеви a и b су такви да су бројеви $15a+16b$ и $16a-15b$ квадрати природних бројева. Наћи најмању могућу вредност коју може узети мањи од та два квадрата. *(Русија)*
5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао, такав да је AB паралелно са ED , BC паралелно са FE и CD паралелно са AF . Нека R_A , R_C и R_E означавају полупречнике кругова описаних око троуглова FAB , $B CD$, DEF , редом, и нека O означава обим шестоугла. Доказати да је

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{O}{2}. \quad \text{(Јерменија)}$$

6. Нека су n , p , q природни бројеви такви да је $n > p+q$. Нека су x_0, x_1, \dots, x_n цели бројеви који задовољавају следеће услове:

(i) $x_0 = x_n = 0$;

(ii) за сваки цео број i ($1 \leq i \leq n$), или је $x_i - x_{i-1} = p$ или је $x_i - x_{i-1} = -q$.

Доказати да постоји пар (i, j) , где је $i < j$ и $(i, j) \neq (0, n)$, такав да је $x_i = x_j$. *(Француска)*

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена