14. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Калабака, Грчка – 30. април 1997.

1. Тачка O у унутрашњости конвексног четвороугла $ABCD$ је таква да је

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 2 \cdot P(ABCD),$$

где $P(ABCD)$ означава површину четвороугла $ABCD$. Доказати да је $ABCD$ квадрат са центром O. *(Југославија)*

2. Нека је $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ колекција подскупова скупа S који има n $(n \geqslant 2)$ елемената. Ако за свака два елемента $x, y \in S$ постоји подскуп $A_i \in \mathscr{A}$ такав да A_i садржи тачно један од елемената x, y, доказати да је $n \leqslant 2^k$. *(Југославија)*

3. Дате су кружнице Γ, C_1 и C_2 у равни. Кружнице C_1 и C_2 изнутра додирују кружницу Γ у тачкама B и C, редом, а саме се споља додирују у тачки D. Нека је A једна од тачака у којој заједничка унутрашња тангента кружница C_1 и C_2 сече Γ и нека су K и L друге тачке пресека правих AB и AC са кружницама C_1 и C_2 редом. Ако су M и N друге тачке пресека праве BC са кружницама C_1 и C_2 редом, доказати да се праве AD, KM и LN секу у једној тачки. *(Грчка)*

4. Одредити све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за све $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f\left(xf(x) + f(y)\right) = \left(f(x)\right)^2 + y.$$

(Бугарска)

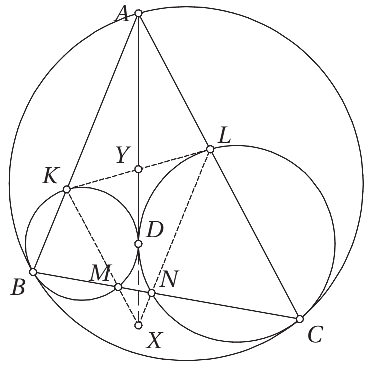
Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Важи $OA^2+OB^2 \geqslant 2OA\cdot OB \geqslant 4P_{OAB}$, уз једнакост ако и само ако је $OA=OB$ и $\sphericalangle AOB=90^\circ$. Сабирањем са аналогним неједнакостима $OB^2+OC^2 \geqslant 4P_{OBC}$, $OC^2+OD^2 \geqslant 4P_{OCD}$ и $OD^2+OA^2 \geqslant 4P_{ODA}$ добијамо $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2 \geqslant 2P_{ABCD}$, при чему једнакост важи само ако је $OA=OB=OC=OD$ и $\sphericalangle AOB=\sphericalangle BOC=\sphericalangle COD=\sphericalangle DOA=90^\circ$, тј. ако је $ABCD$ квадрат са центром O.

2. Сваком елементу a скупа S придружимо низ нула и јединица $[a]=(x_1,\dots,x_k)$, где је $x_i=1$ ако $a\in A_i$, и $x_i=0$ у супротном. По услову задатка, сви низови $[a]$ су различити, а низова нула и јединица дужине k има укупно 2^k, одакле следи тврђење.

3. Нека се праве KM и LN секу у тачки X. Хомотетија $\mathcal{H}_B$ која слика круг C_1 у Γ слика тачке K и M у A и C редом, тако да је $KM\parallel AC$. Аналогно је $LN\parallel AB$. То значи да је $AKXL$ паралелограм, па AX пролази кроз средиште Y дужи KL.



С друге стране, важи $AK\cdot AB=AD^2=AL\cdot AC$ (потенција тачке A у односу на кругове C_1 и C_2), па тачке B,C,L,K леже на истом кругу. Зато је $\sphericalangle AKL=\sphericalangle ACB=\sphericalangle KMB$, па права KL додирује круг C_1. Слично, KL додирује и C_2. Према томе, ако се праве AD и KL секу у тачки Y', онда је $Y'K=Y'D=Y'L$, па је $Y'\equiv Y$, тј. праве AD и AX се поклапају, одакле следи тврђење.

4. Десна страна дате једначине $(*)$ може да узме све реалне вредности, па је функција f "на". То значи да постоји c такво да је $f(c)=0$. Замена $x=c$ у $(*)$ даје $f(f(y))=y$. Сада стављањем $f(x)$ уместо x у $(*)$ добијамо $f(xf(x)+f(y))=x^2+y$, што заједно са $(*)$ даје $f(x)^2=x^2$ за све x.

Претпоставимо да постоје a и b $(ab\neq 0)$ такви да је $f(a)=-a$ и $f(b)=b$. Убацивањем $(x,y)=(a,b)$ у $(*)$ добијамо $f(-a^2+b)=a^2+b$, што је немогуће ако су $a,b\neq 0$.

Дакле, једине могуће функције су $f(x)\equiv x$ и $f(x)\equiv -x$, и оне су заиста решења.