38. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА
Аргентина – Мар дел Плата, 18.–31. јул 1997.

Први дан
24. јул 1997.

1. Тачке са целим координатама у равни су темена јединичних квадрата. Квадрати су наизменично обојени црно и бело (као на шаховској табли). За сваки пар (m, n) природних бројева уочен је правоугли троугао чија темена имају целе координате и чије катете, дужина m и n, леже на страницама квадрата. Нека је S_1 укупна површина црног, а S_2 укупна површина белог дела троугла и нека је

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|.$$

(а) Израчунати $f(m, n)$ за све природне m и n исте парности.

(б) Доказати да је $f(m, n) \leqslant \dfrac{1}{2} \cdot \max\{m, n\}$ за све m и n.

(в) Доказати да не постоји константа C таква да важи $f(m, n) < C$ за све m и n. *(Белорусија)*

2. У троуглу ABC угао код темена A је најмањи. Нека је U унутрашња тачка лука између B и C описане кружнице троугла ABC који не садржи A. Симетрале дужи AB и AC секу праву AU у тачкама V и W, редом, а праве BV и CW се секу у T. Доказати да је $AU = TB + TC$. *(Велика Британија)*

3. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви који задовољавају услове:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1 \quad \text{и} \quad |x_i| \leqslant \frac{n+1}{2} \ \text{ за } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказати да постоји пермутација $y_1, y_2, \ldots, y_n$ бројева $x_1, x_2, \ldots, x_n$, таква да је

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}\,.$$

(Русија)

Други дан
25. јул 1997.

4. Матрица $n \times n$ (квадратна таблица) чији су чланови елементи скупа $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ назива се *сребрна* матрица ако за свако $i = 1, 2, \ldots, n$, i-та врста и i-та колона заједно садрже све елементе из S. Доказати да:

(а) не постоји сребрна матрица за $n = 1997$;

(б) сребрне матрице постоје за бесконачно много вредности n. *(Иран)*

5. Наћи све парове (a, b) природних бројева за које важи

$$a^{b^2} = b^a.$$

(Чешка)

6. За сваки природан број n нека $f(n)$ означава број представљања броја n у облику збира степена броја 2 са ненегативним целим експонентима. Репрезентације које се разликују само у редоследу њихових сабирака сматрају се истим. На пример, $f(4) = 4$, јер број 4 може бити представљен на следећа четири начина: 4, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$. Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 3$ важи

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

(Бугарска)