38. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Мар дел Плата, Аргентина – четвртак, 24. јул 1997.

1. Тачке са целим координатама у равни су темена јединичних квадрата. Квадрати су наизменично обојени црно и бело (као на шаховској табли). За сваки пар природних бројева (m,n) уочен је правоугли троугао чија темена имају целе координате и чије катете, дужина m и n, леже на страницама квадрата. Нека је S_1 укупна површина црног, а S_2 укупна површина белог дела троугла и нека је

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

(а) Израчунати $f(m,n)$ за све природне бројеве m и n исте парности.

(б) Доказати да је $f(m,n) \leqslant \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ за све m и n.

(в) Доказати да не постоји константа C таква да важи $f(m,n) < C$ за све m и n. *(Белорусија)*

2. У троуглу ABC угао код темена A је најмањи. Нека је U унутрашња тачка лука између B и C описаног круга троугла ABC који не садржи A. Симетрале дужи AB и AC секу праву AU у тачкама V и W, редом, а праве BV и CW се секу у T. Доказати да је $AU = TB + TC$. *(Велика Британија)*

3. Нека су $x_1, x_2, \dots, x_n$ реални бројеви који задовољавају услове:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1 \quad \text{и} \quad |x_i| \leqslant \frac{n+1}{2} \text{ за } i = 1,2,\dots,n.$$

Доказати да постоји пермутација $y_1, y_2, \dots, y_n$ бројева $x_1, x_2, \dots, x_n$ таква да је

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

(Русија)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

38. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Мар дел Плата, Аргентина – петак, 25. јул 1997.

4. Матрица $n \times n$ (квадратна таблица) чији су чланови елементи скупа $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ назива се *сребрна* матрица ако за свако $i = 1, 2, \ldots, n$ i-та врста и i-та колона заједно садрже све елементе из S. Доказати да:

(а) не постоји сребрна матрица за $n = 1997$;

(б) сребрне матрице постоје за бесконачно много вредности n. *(Иран)*

5. Наћи све парове (a, b) природних бројева за које важи

$$a^{b^2} = b^a.$$

(Чешка)

6. За сваки природан број n нека $f(n)$ означава број представљања броја n у облику збира степена броја 2 са ненегативним целим експонентима. Представљања која се разликују само у редоследу њихових сабирака сматрају се истим. На пример, $f(4) = 4$, јер број 4 може бити представљен на следећа четири начина: 4, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$. Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 3$ важи

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

(Бугарска)

Language: Serbian

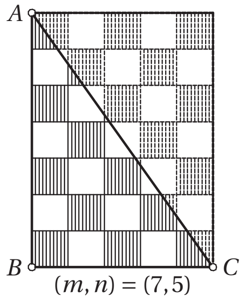
Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

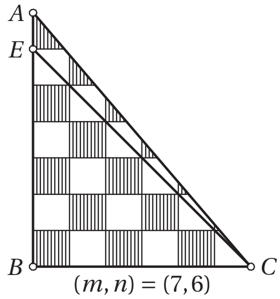
1. Нека је ABC дати троугао са $AB = m$, $BC = n$ и $\sphericalangle B = 90^\circ$. Са $b(\mathscr{P})$ и $c(\mathscr{P})$ редом означаваћемо површине белог и црног дела многоугла $\mathscr{P}$.

(а) Допунимо троугао до правоугаоника $ABCD$. За $m \equiv n \pmod 2$ бојење правоугаоника је симетрично у односу на средиште дужи AC, па имамо $b(ABC) = \frac{1}{2}b(ABCD)$ и $c(ABC) = \frac{1}{2}c(ABCD)$. Тако је $f(m,n) = \frac{1}{2}|b(ABCD) - c(ABCD)|$, што је једнако $\frac{1}{2}$ за непарне m,n, а 0 за парне m,n.

(б) За $m \equiv n \pmod 2$ тврђење следи из **(а)**. Нека је $m \not\equiv n \pmod 2$ и $m > n$. Одаберимо тачку E на страници AB такву да је $AE = 1$. На основу **(а)** је $|b(EBC) - c(EBC)| = f(m-1,n) \leqslant \frac{1}{2}$, па је $f(m,n) \leqslant \frac{1}{2} + |b(EAC) - c(EAC)| \leqslant \frac{1}{2} + P_{EAC} = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2} = \frac{n}{2}$.



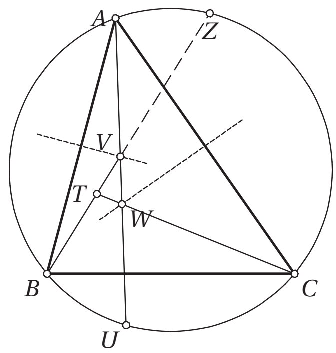
$(m,n) = (7,5)$



$(m,n) = (7,6)$

(в) Израчунајмо $f(2k+1,2k)$ за $k \in \mathbb{N}$. Нека је E тачка на страници AB са $AE = 1$. Ако је квадрат код темена B црн, дуж CE сече само беле квадрате, па се црни део троугла EAC састоји од $2k$ сличних троуглова површина $\frac{i^2}{4k(2k+1)}$ за $i = 1,2,\dots,2k$. Тако је $c(EAC) = \frac{1}{4k(2k+1)}\sum_{i=1}^{2k} i^2 = \frac{4k+1}{12}$ и одатле $b(EAC) = \frac{8k-1}{12}$ и $f(2k+1,2k) = |b(EAC) - c(EAC)| = \frac{2k-1}{6}$, што није ограничено одозго.

2. Нека права BV сече описани круг троугла ABC у тачки $Z \neq B$. Тетиве BZ и AU су симетричне у односу на симетралу дужи AB, па је $BZ = AU$.



Такође важи $\sphericalangle TZC = \sphericalangle BZC = \sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle TCZ = \sphericalangle BTC - \sphericalangle BZC = \sphericalangle BTC - \sphericalangle BAC = \sphericalangle TBA + \sphericalangle TCA = \sphericalangle BAV + \sphericalangle CAW = \sphericalangle BAC$, па је троугао TZC једнакокраки и $TZ = TC$. Сада је $TB + TC = BZ = AU$.

3. За сваку пермутацију $\pi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ бројева $x_1, x_2, \dots, x_n$ означимо са $S(\pi)$ збир $y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n$. Претпоставимо, противно тврђењу, да је $|S(\pi)| > \frac{n+1}{2}$ за све π.

Приметимо да, ако се пермутација π' добија из пермутације π заменом два суседна елемента, рецимо y_k и y_{k+1}, онда се $S(\pi)$ и $S(\pi')$ разликују за $|y_k - y_{k+1}| \leqslant n+1$, па по претпоставци морају да буду истог знака.

Сада посматрајмо пермутације $\pi_0 = (x_1, \dots, x_n)$ и $\overline{\pi_0} = (x_n, \dots, x_1)$. Постоји низ пермутација $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_m = \overline{\pi_0}$ бројева $x_1, \dots, x_n$ таквих да се π_i добија из π_{i-1} заменом нека два суседна елемента за свако i. Заиста, низом замена можемо да поставимо x_n на прво место, затим x_{n-1} на друго, итд. Следи да су $S(\pi_0),\dots,S(\pi_m)$ истог знака. Међутим, како је $|S(\pi_0)+S(\pi_m)|=(n+1)|x_1+\cdots+x_n|=n+1$, бар један од бројева $|S(\pi_0)|$ и $|S(\overline{\pi_0})|$ није већи од $\frac{n+1}{2}$, што је контрадикција.

4. **(а)** Претпоставимо да постоји сребрна матрица $n\times n$ за неко $n>1$. Назовимо i-*тим крстом* унију i-те врсте и i-те колоне $(1\leqslant i\leqslant n)$. Пошто је $2n-1>n$, можемо да одаберемо број $x\in\{1,2,\dots,2n-1\}$ који се не појављује на главној дијагонали. Сваки од n крстова садржи тачно један број x, при чему се свако појављивање броја x налази у тачно два крста. Следи да се x појављује $\frac{n}{2}$ пута, па n мора бити парно. Дакле, за $n=1997$ не постоји сребрна матрица.

(б) Претпоставимо да је A_n сребрна матрица $n\times n$. Нека је $B_n^{(k)}=[b_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ матрица $n\times n$ таква да је b_{ij} једнако остатку при дељењу $i+j-2$ са n, увећаном за k. Свака врста или колона матрице $B_n^{(k)}$ садржи сваки од бројева $k,k+1,\dots,k+n-1$ тачно једном. Дефинишимо матрицу

$$A_{2n}=\begin{bmatrix} A_n & B_n^{(2n)} \\ B_n^{(3n)} & A_n \end{bmatrix}.$$

Лако се види да је A_{2n} сребрна матрица реда $2n$. Заиста, за $1\leqslant i\leqslant n$ (за $n<i\leqslant 2n$ је слично), првих n поља i-те врсте и првих n поља i-те колоне у унији садрже све бројеве $1,2,\dots,2n-1$, других n поља i-те врсте садржи све бројеве $2n,\dots,3n-1$, а других n поља i-те колоне садржи све бројеве $3n,\dots,4n-1$, тако да унија i-те врсте и i-те колоне садржи све бројеве $1,2,\dots,4n-1$.

Полазећи од сребрне матрице $A_2=\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&1\end{smallmatrix}\right]$ за $n=2$, на овај начин индуктивно конструишемо сребрну матрицу за $n=2^k$, $k\in\mathbb{N}$.

5. Нека су m и n узајамно прости природни бројеви такви да је $\frac{a}{b^2}=\frac{m}{n}$. Из $a^{b^2}=b^a$ следи $a^n=b^m$. Број $z=a^{1/m}=b^{1/n}$ је цео: заиста, ако су $k,l\in\mathbb{N}$ такви да је $km-ln=1$, онда је $z=\frac{z^{km}}{z^{ln}}=\frac{a^k}{b^l}$. Полазна једначина постаје $z^{mz^{2n}}=a^{b^2}=b^a=z^{nz^m}$, дакле

$$z^{m-2n}=\frac{m}{n}.$$

Разликујемо два случаја.

(i) $m<2n$. Тада је $\frac{m}{n}=\frac{1}{z^{2n-m}}$, одакле је $m=1$ и $n=z^{2n-m}=z^{2n-1}$. Како је $z^{2n-1}>2n-1\geqslant n$ за $z>1$, мора бити $z=n=1$, па имамо решење $(a,b)=(1,1)$.

(ii) $m\geqslant 2n$. Тада је $n=1$ и $m=z^{m-2n}=z^{m-2}$. За $z>4$ је $z^{m-2}>m$. За $z=3$ једино решење је $m=3$, што даје решење $(a,b)=(27,3)$. За $z=2$ једино решење је $m=4$, што даје $(a,b)=(16,2)$.

Према томе, једина решења су $(1,1)$, $(16,2)$ и $(27,3)$.

6. Између посматраних представљања за $2k+1$ и за $2k$ постоји бијекција - брисање сабирка 1 (какав очигледно постоји у представљању $2k+1$), па је $f(2k+1)=f(2k)$. Даље, број представљања за $2k$ која садрже јединицу једнак је $f(2k-1)=f(2k-2)$, док је број представљања која не садрже јединицу једнак $f(k)$ (бијекција је дељење свих сабирака са 2). Тако добијамо релацију

$$f(2k)=f(2k-2)+f(k). \tag{1}$$

Сабирањем једнакости (1) за $k=1,2,\dots,n$ добијамо

$$f(2n)=f(0)+f(1)+\cdots+f(n). \tag{2}$$

Пошто је $f(k)<f(n)$ за $k<n$ и још $f(0)+f(1)<f(n)$ $(n\geqslant 2)$, из (2) следи $f(2n)\leqslant nf(n)$ за $n\geqslant 2$. Сада једноставна индукција даје горњу оцену:

$$f(2^n)\leqslant 2^{1+2+\cdots+(n-1)}f(2)<2^{n^2/2} \quad \text{за } n\geqslant 3.$$

Даље, на основу (1), $f(x+2)-f(x)$ расте по x, па тако за све $k<m$ имамо $f(2m+2k)-f(2m)\geqslant f(2m+2k-2)-f(2m-2)\geqslant\dots\geqslant f(2m)-f(2m-2k)$, дакле

$$f(2m+2k)+f(2m-2k)\geqslant 2f(2m). \tag{3}$$

Сабирање неједнакости (3) за $k=1,2,\dots,m$ даје $f(0)+f(2)+\cdots+f(4m)\geqslant(2m+1)f(2m)$. Пошто је $f(2k+1)=f(2k)$, такође имамо $f(3)+f(5)+\cdots+f(4m-1)\geqslant(2m-1)f(2m)$. Сабирањем добијамо

$$f(8m)=f(0)+f(1)+\cdots+f(4m)>4mf(2m).$$

Доња оцена $f(2^n)>2^{n^2/4}$ важи за $n=2$ и $n=3$, а за $n>3$ важи по индукцији: $f(2^n)>2^{n-1}f(2^{n-2})>2^{n-1+(n-2)^2/4}=2^{n^2/4}$.

Напомена. Може се показати да је $\log_2 f(2^n)=\frac{n^2}{2}-n\log_2 n+O(n)$; дакле, горња оцена из задатка је много ближа асимптотском понашању функције f него доња.