САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Ниш, 12. април 1997.

Први разред

1. Пешак се креће по тачкама са целим координатама у равни по следећим правилима:

(i) Пешак се у почетку налази у тачки (m, n).

(ii) Ако се пешак у неком тренутку налази у тачки (x, y), онда из ње прелази у тачку $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x-1, y)$ или $(x, y-1)$ редом, у зависности од тога да ли је остатак при дељењу $x+y$ са 4 једнак $0, 1, 2$ или 3.

Ако се пешак после пређених 1997 корака нашао у тачки $(0, 1997)$, одредити све могуће тачке (m, n).

2. Нека је O унутрашња тачка троугла ABC. Праве OA, OB, OC секу наспрамне странице редом у тачкама P, Q, R. Наћи минималну вредност производа

$$\frac{AO}{OP} \cdot \frac{BO}{OQ} \cdot \frac{CO}{OR}$$

и одредити тачку O за коју се та вредност достиже.

3. У троуглу ABC, CD је висина, E средиште странице AB, а P и Q подножја нормала из тачака A и B на симетралу угла ACB. Доказати да тачке D, E, P, Q леже на истом кругу.

4. Доказати да међу бројевима облика $[2^{k+\frac{1}{2}}]$, где је k природан број, има бесконачно много парних.
($[x]$ је највећи цео број не већи од x.)

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Ниш, 12. април 1997.

Други разред

1. У равни су дате права s и тачке A и B са исте стране праве s. Нека је M промењлива тачка праве s, а A_1 и B_1 нормалне пројекције тачака A и B на праве MB и MA, редом. Одредити положај тачке M тако да дужина A_1B_1 буде минимална.

2. Свака ивица конвексног полиедра је означена знаком $+$ или $-$. Доказати да постоји теме полиедра међу чијим ивичним угловима има мање од четири чији су краци различито означени.

3. Означимо са $S(n)$ збир цифара природног броја n. Да ли постоји n тако да важе једнакости $S(n) = 1997$ и $S(n^2) = 1997^2$?

4. У свакој од три школе има по n ученика. Сваки ученик познаје бар $n+1$ ученика из остале две школе. Доказати да постоје три ученика, по један из сваке школе, који се međусобно познају. (Познанство је симетрична релација.)

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Ниш, 12. април 1997.

Трећи и четврти разред

1. Постоји ли природан број n за који се скуп $\{n, n+1, \ldots, n+1997\}$ може представити у облику уније međусобно дисјунктних скупова $A_1, A_2, \ldots,$ A_k $(k \geq 2)$ тако да су производи бројева у свим скуповима $A_1, \ldots, A_n$ исти?

2. Дат је полином $P(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$. Доказати да тачно четири корена полинома $P(x)$ имају модуле једнаке 1.

3. Дат је тетраедар $ABCD$ запремине V. На ивицама AD, BD, CD дате су редом тачке A_1, B_1, C_1 тако да раван $A_1B_1C_1$ садржи тежиште тетраедра. Означимо са V_1, V_2, V_3 запремине тетраедара $AA_1B_1C_1$, $BA_1B_1C_1$ и $CA_1B_1C_1$, редом. Наћи најмању могућу вредност збира $V_1 + V_2 + V_3$.

4. Пет ћупова означени су бројевима $0, 1, 2, 3, 4$. Ћуп означен бројем 0 је празан, а у сваком од преосталих налази се известан број златника. У i-том ћупу налази се r_i златника. Два играча, A и B, наизменично премештају златнике. Једним потезом играч може преместити произвољан број златника (бар један) из било ког ћупа у ћуп са редним бројем мањим за 1. Први игра A. Играч после чијег се потеза сви златници нађу у ћупу означеном са 0 добија све златнике. Који играч има добитну стратегију?

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.