39. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Тајпеј, Тајван – среда, 15. јул 1998.

1. У конвексном четвороуглу $ABCD$, дијагонале AC и BD су међусобно нормалне, а наспрамне странице AB и DC нису паралелне. Нека се тачка P, у којој се секу симетрале страница AB и DC, налази унутар четвороугла $ABCD$. Доказати да је $ABCD$ тетиван четвороугао ако и само ако троуглови ABP и CDP имају једнаке површине. *(Луксембург)*

2. На такмичењу учествује a такмичара и b судија, при чему је $b \geqslant 3$ непаран природан број. Сваки судија оцењује сваког такмичара или са „прошао" или са „пао". Нека је k број такав да се за сваку двојицу судија њихове оцене поклапају код највише k такмичара. Доказати да је

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

(Индија)

3. За сваки природан број n, означимо са $d(n)$ број позитивних делилаца броја n (укључујући 1 и сам број n). Одредити све природне бројеве k такве да за неко n важи

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

(Белорусија)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

39. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Тајпеј, Тајван – четвртак, 16. јул 1998.

4. Одредити све парове (a,b) природних бројева такве да је број a^2b+a+b дељив са ab^2+b+7. *(Велика Британија)*

5. Нека је I центар уписаног круга троугла ABC. Нека уписани круг додирује странице BC, CA и AB у тачкама K, L и M, редом. Права која садржи тачку B и паралелна је са MK сече праве LM и LK редом у тачкама R и S. Доказати да је угао RIS оштар. *(Украјина)*

6. Разматрају се све функције $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такве да важи

$$f(t^2f(s)) = s\cdot(f(t))^2$$

за све s и t из $\mathbb{N}$. Одредити најмању могућу вредност броја $f(1998)$. *(Бугарска)*

Language: Serbian

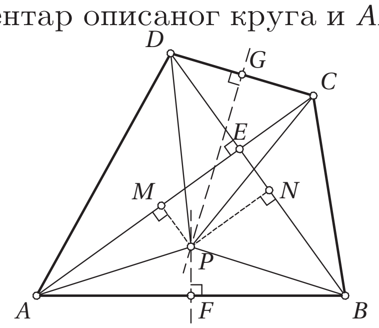
Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Означимо са E пресек дијагонала AC и BD. Нека су M и N редом подножја нормала из тачке P на праве AC и BD. Претпоставићемо да M лежи на дужи AE, а N на дужи BE (остали случајеви су слични). Имамо $S_{ABP}=S_{ABE}-S_{AEP}-S_{BEP}=\frac{1}{2}(AE{\cdot}BE-AE{\cdot}EN-BE{\cdot}EM)=\frac{1}{2}(AM{\cdot}BN-EM{\cdot}EN)$ и слично $S_{CDP}=\frac{1}{2}(CM{\cdot}DN-EM{\cdot}EN)$, тако да је

$$S_{ABP}=S_{CDP} \iff AM\cdot BN=CM\cdot DN. \tag{1}$$

Ако је четвороугао $ABCD$ тетиван, P је његов центар описаног круга и $AM=CM$ и $BN=DN$, па из (1) следи $S_{ABP}=S_{CDP}$.



Ако $ABCD$ није тетиван, нека је без смањења општости $PA=PB>PC=PD$. Тада је $AM>CM$ и $BN>DN$, па важи $S_{ABP}>S_{CDP}$, што доказује други смер.

Друго решење. Означимо средишта страница AB и CD са F и G, редом. Претпоставимо да је P са исте стране праве PQ са које је теме B. Пошто је $PF\perp AB$, $PG\perp CD$, $\sphericalangle FEB=\sphericalangle ABE$ и $\sphericalangle GEC=\sphericalangle DCE$, рачун углова даје $\sphericalangle FPG=\sphericalangle FEG=90^\circ+\sphericalangle ABE+\sphericalangle DCE$.

Даље имамо $S_{ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot FP=FE\cdot FP$ и слично $S_{CDP}=GE\cdot GP$, па је $S_{ABP}=S_{CDP}$ еквивалентно са $FE/EG=GP/PF$, што важи ако и само ако је $\triangle EFG\sim\triangle PGF$, тј. ако и само ако је $EFPG$ паралелограм. Ово се своди на $\sphericalangle EFP=\sphericalangle EGP$, тј. $2\sphericalangle ABE=2\sphericalangle DCE$, што је управо услов тетивности четвороугла $ABCD$.

2. Нека је $b=2r+1$. Пошто се сваки од $\binom{b}{2}$ парова судија слаже код највише k такмичара, укупан број поклапања није већи од $k\binom{b}{2}$.
С друге стране, ако за i-тог такмичара x_i судија гласа за пролаз, а $b-x_i$ за пад, број поклапања на овом такмичару износи

$$\binom{x_i}{2}+\binom{n-x_i}{2}=\frac{x_i^2+(b-x_i)^2-b}{2}\geqslant\frac{r^2+(b-r)^2-n}{2}=\frac{(b-1)^2}{4}.$$

Према томе, укупно има бар $\frac{a(b-1)^2}{4}$ поклапања, одакле следи $k\binom{b}{2}\geqslant\frac{a(b-1)^2}{4}$, што се своди на $\frac{k}{a}\geqslant\frac{b-1}{2b}$.

3. Одговор су сви непарни природни бројеви.

Ако је $n=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_r^{s_r}$ канонска факторизација броја n и $a_i=s_i+1$ за $1\leqslant i\leqslant r$, имамо $d(n)=a_1a_2\cdots a_r$ и $d(n^2)=(2a_1-1)(2a_2-1)\cdots(2a_r-1)$. Задатак се своди на одређивање свих природних бројева m представљивих у облику

$$m=\frac{2a_1-1}{a_1}\cdot\frac{2a_2-1}{a_2}\cdot\dots\cdot\frac{2a_r-1}{a_r},\quad \text{где су } a_1,a_2,\dots,a_r\in\mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{1}$$

Јасно је да k мора бити непарно јер је такво и $d(n^2)$. Показаћемо индукцијом да сваки непаран број $k \in \mathbb{N}$ може да се представи у облику (1).

База $k = 1$ је тривијална. Даље, случај $k = 2m-1$ за непарно m следи по индуктивној претпоставци јер је $k = \frac{2m-1}{m} \cdot m$. За парно m ово представљање не ради. Ипак, за $k = 4m-1$ са непарним m налазимо представљање $k = \frac{12m-3}{6m-1} \cdot \frac{6m-1}{3m} \cdot m$. Наставићемо ову идеју. Нека је $k = 2^t m - 1$, где је m непарно. Означавајући $\ell = (2^t - 1)m$ имамо

$$k = \frac{2^t \ell - 2^t + 1}{2^{t-1}\ell - 2^{t-1} + 1} \cdot \dots \cdot \frac{4\ell - 3}{2\ell - 1} \cdot \frac{2\ell - 1}{\ell} \cdot m.$$

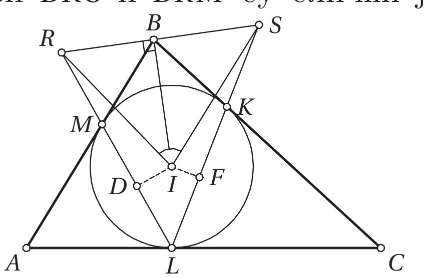
Овим је индукција завршена.

4. Приметимо да је број $b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a$ дељив са $ab^2 + b + 7$, и притом је $b^2 - 7a < ab^2 + b + 7$. Дакле, ако је $b^2 - 7a \geqslant 0$, мора бити $b^2 - 7a = 0$. Тада је $(a, b) = (7t^2, 7t)$ за неко $t \in \mathbb{N}$, и лако се проверава да ово јесу решења.

Остаје случај $7a - b^2 > 0$. Тада имамо $ab^2 + b + 7 \leqslant 7a - b^2 < 7a$, одакле је $b \leqslant 2$. За $b = 1$ добијамо $a + 8 \mid 7a - 1$ и одатле $a + 8 \mid 7(a + 8) - (7a - 1) = 57$, тако да су једине могућности $a = 11$ и $a = 49$; парови $(11, 1)$, $(49, 1)$ су заиста решења. За $b = 2$ добијамо $4a + 9 \mid 7a - 4$ што је немогуће јер је $0 < 7a - 4 < 2(4a + 9)$ и $7a - 4 \neq 4a + 9$.

Према томе, једина решења (a, b) су парови $(11, 1)$, $(49, 1)$ и $(7t^2, 7t)$ за $t \in \mathbb{N}$.

5. Треба доказати да је тачка I ван круга на пречником RS, а пошто је $BI \perp RS$, то је еквивалентно са $BI^2 > BR \cdot BS$. Троуглови BKS и BRM су слични јер је $\sphericalangle KBS = \sphericalangle RBM = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ и $\sphericalangle BKS = \sphericalangle CKL = \sphericalangle KML = \sphericalangle BRM = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Одавде имамо $\frac{BS}{BK} = \frac{BM}{BR} = \frac{BK}{BR}$, тј. $BR \cdot BS = BK^2 < BI^2$.



Друго решење. Нека су D и F редом средишта дужи LM и LK. Из тетивних четвороуглова $RBID$ и $SBIF$ добијамо $\sphericalangle RIS = \sphericalangle RLS + \sphericalangle IRL + \sphericalangle ISL = 90^\circ - \frac{\beta}{2} + \sphericalangle IBD + \sphericalangle IBF = 90^\circ - \frac{\beta}{2} + \sphericalangle DBF$.

Како су BD и BF тежишне дужи у троугловима BLM и BLK са $BL > BM$ и $BL > BK$, важи $\sphericalangle LBD < \frac{1}{2}\sphericalangle LBM$ и $\sphericalangle LBF < \frac{1}{2}\sphericalangle LBK$. Сабирање ових неједнакости даје $\sphericalangle DBF < \frac{1}{2}\beta$ и одатле $\sphericalangle RIS < 90^\circ$.

6. Означимо $f(1) = a$. Замене $t = 1$ и $s = 1$ дају $f(f(z)) = a^2 z$ и $f(az^2) = f(z)^2$ за све $z \in \mathbb{N}$. Ове једначине заједно с полазном дају

$$f(x)^2 f(y)^2 = f(x)^2 f(ay^2) = f(x^2 f(f(ay^2))) = f(x^2 a^3 y^2) = f(a(axy)^2) = f(axy)^2,$$

одакле је $f(axy)=f(x)f(y)$ за све $x,y\in\mathbb{N}$. Одавде је такође $f(axy)=f(xy)f(1)$, па добијамо

$$af(xy)=f(x)f(y) \quad \text{за све } x,y\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Приметимо да из (1) индукцијом следи $f(x)^n=a^{n-1}f(x^n)$ за све $n\in\mathbb{N}$, па $a^{n-1}\mid f(x)^n$. Дакле, ако су p^α и p^β редом тачни степени неког простог броја p који деле a и $f(x)$, онда је $\alpha\leqslant\frac{n}{n-1}\beta$ за све n, па мора бити $\alpha\leqslant\beta$. То важи за свако p; према томе, $a\mid f(x)$.

Надаље посматрамо функцију $g(x)=f(x)/a$ на скупу $\mathbb{N}$. По претходном важи

$$g(1)=1, \quad g(xy)=g(x)g(y), \quad g(g(x))=x \quad \text{за све } x,y\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Јасно је да је g бијективна функција и да је $g(x)$ прост број кад год је x прост: заиста, ако је $g(p)=uv$ и $u,v>1$, онда је $g(u)g(v)=g(uv)=p$, што је немогуће јер су $g(u),g(v)>1$ због бијективности. Сада је $f(1998)\geqslant g(1998)=g(2\cdot 3^3\cdot 37)=g(2)\cdot g(3)^3\cdot g(37)$, при чему су $g(2)$, $g(3)$ и $g(37)$ различити прости бројеви, па је $g(1998)\geqslant 2^3\cdot 3\cdot 5=120$.

Вредност $f(1998)=120$ се достиже за произвољну функцију $f\equiv g$ која задовољава (2) и $g(2)=3$, $g(3)=2$, $g(5)=37$, $g(37)=5$. Према томе, одговор је 120.