Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.02.1998.

Први разред

1. Колико има троцифрених бројева написаних помоћу цифара $0, 1, 2, 3, 4, 5$ који су дељиви са 15 и код којих
(а) су све цифре различите? (б) цифре могу да се понављају?

2. У троуглове и квадрате приказане на слици уписати по један од бројева $1, 2, 3, \ldots, 9$, и то у троуглове непарне, а у четвороуглове парне бројеве, тако да 12 релација мање-веће буду испуњене. На колико начина се то може учинити?

$$\begin{array}{ccccc}
\triangle & < & \square & > & \triangle \\
\vee & & \vee & & \wedge \\
\triangle & < & \triangle & < & \square \\
\vee & & \vee & & \wedge \\
\square & < & \square & < & \triangle
\end{array}$$

3. Наћи петоцифрен природан број чија је половина квадрат, а трећина куб неког природног броја.

4. На табли је написано неколико бројева различитих од 0. Сваки је једнак полузбиру осталих. Колико има бројева на табли?

5. Бројеви 1, 2, 3, 4, 5 су подељени у две групе, али тако да у свакој групи има бар један елемент. Доказати да се могу наћи два броја из једне групе чија је разлика једнака броју који се налази у тој истој групи.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.02.1998.

Други разред

1. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Кроз средиште M дијагонале BD повучена је права паралелна са AC. Нека је N тачка у којој та права сече страницу AB. Доказати да права CN дели четвороугао на два дела једнаких површина.

2. Нека је

$$A = \frac{\left(\frac{\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{a^2bc}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} + \sqrt[4]{bc}\right)^2 + bc + 3}{\sqrt{bc}+3}\,.$$

Доказати да је $A \leqslant 1 + \frac{b+c}{2}$.

3. Два различита природна броја M и N имају по 1998 цифара. У декадном запису сваког од њих појављује се цифра 1 - 1500 пута, цифра 2 - 300 пута, цифра 3 - 100 пута и цифра 4 - 98 пута. Да ли може један од та два броја да буде делилац другог?

4. Решити систем једначина по $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, где је a дати реалан број:

$$\begin{cases} x^2 &= (x-a)y \\ y^2 - xy &= 9ax. \end{cases}$$

5. Ако су $x, y \in \mathbb{R}$, $xy = 1$ и $x > y$, доказати да је

$$x^2 + y^2 \geqslant 2\sqrt{2}(x-y).$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.02.1998.

Трећи разред

1. Доказати неједнакост
$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

2. Нека је $A_1A_2\dots A_n$ правилни n-тоугао ($n \geqslant 5$). Доказати да тачке A_1, A_2, $B_i = A_1A_i \cap A_2A_{i+1}$ ($3 \leqslant i \leqslant n-1$) леже на једном кругу.

3. Одредити све праве кружне ваљке за које не постоји неподударан ваљак исте површине и запремине.

4. У углу шаховске табле $n \times n$ стоји фигура. Два играча наизменично померају фигуру на суседно поље (по једно поље навише, наниже, лево или десно), али тако да фигура не сме двапут да се нађе на истом пољу. Игру губи играч који не може да одигра следећи потез. У зависности од n испитати да ли неки од играча може тако да игра да побеђује независно од игре другог играча.

5. Нека су α, β, γ углови у неправоуглом троуглу. Посматрајмо систем
$$\begin{cases} x \cdot \cos\beta + \frac{1}{z} \cdot \cos\alpha = 1 \\ y \cdot \cos\gamma + \frac{1}{x} \cdot \cos\beta = 1 \\ z \cdot \cos\alpha + \frac{1}{y} \cdot \cos\gamma = 1. \end{cases}$$

(а) Показати да систем има решење $x = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, $y = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, $z = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$.
(б) Наћи сва реална решења тог система.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

07.02.1998.

Четврти разред

1. Да ли је функција $f(x) = \cos(x\sqrt{7})\cos x$ периодична?

2. Нека је задат једнакокраки троугао ABC (AB је основица). Над краком AC конструисан је споља квадрат $ADEC$ чији центар је тачка O. Уколико се права паралелна основици AB кроз тачку O, продужетак крака BC и нормала на основицу кроз A секу у једној тачки M, доказати да је $3 \cdot AM = AB$.

3. У равни је дата крива $G : y = px^3 + qx + 4$, $p \neq 0$. Нека су $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ три различите тачке те криве. Доказати да су A, B и C колинеарне ако и само ако је $x_A + x_B + x_C = 0$.

4. Доказати да аритметичка прогресија $a_k = 1000 + 1998k$ садржи бесконачно много бројева који су потпуни квадрати.

5. Наћи све парове реалних бројева (x, y) тако да је (i) $x \geqslant y \geqslant 1$ и (ii) $2x^2 - xy - 5x + y + 4 = 0$.

Време за рад 180 минута.