Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Крагујевац, 14.03.1998.

Први разред

1. (а) Раставити на чиниоце израз $x^4 + x^2y^2 + y^4$.

(б) Испитати да ли је број $9^{1998} + 3^{1998} + 1$ прост.

2. Нека су a, b, c дати различити бројеви из $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ и нека је дат израз

$$V(x,y) = \frac{1}{(a-x)^2(a-y)^2}\left((a-b)^2(c-x)(c-y) - (c-a)^2(b-x)(b-y)\right),$$

где $x, y \neq a$. Доказати да постоје изрази $f(x)$ и $g(y)$ (тј. такви да f не садржи y, а g не садржи x) такви да се израз $V(x,y)$ може за свако $x, y \in \mathbb{R}$ ($x \neq y$, $x, y \neq a$) приказати у облику

$$V(x,y) = \frac{1}{x-y}(f(x) - g(y)).$$

3. Дат је израз

$$*1 * 3 * 3^2 * 3^3 * \cdots * 3^{1997} * 3^{1998}.$$

Аркадије и Бранислав наизменично замењују по једну звездицу са $+$ или са $-$. Бранислав настоји да број који се добије после замене и последње звездице буде дељив са 7. Може ли Аркадије да га спречи у томе ако он први игра?

4. Дат је троугао ABC. Одредити све тачке M у његовој равни тако да троуглови ABM, BCM и CAM имају једнаке површине.

5. Доказати да осмоугао коме су сви унутрашњи углови једнаки и коме су дужине свих страница разионални бројеви има центар симетрије.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Крагујевац, 14.03.1998.

Други разред

1. Испитати да ли је рационалан број

$$\sqrt{15-6\sqrt{6}}+2\sqrt{30-8\sqrt{14}}+\sqrt{10-4\sqrt{6}}+\sqrt{105-28\sqrt{14}}.$$

2. Нека су $x_1,\dots,x_n$ позитивни реални бројеви који испуњавају услов $x_1+x_2+\dots+x_n=1$. Доказати да за сваки позитиван број a важи неједнакост

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2}+\frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3}+\dots+\frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1}\geqslant\frac{n^2}{2}\,.$$

Када важи знак једнакости?

3. Наћи најмањи природан број a за који постоје цели бројеви b и c такви да квадратни трином ax^2+bx+c има два различита реална корена који припадају интервалу $(0,1)$.

4. Израчунати површину тетивног осмоугла коме су неке четири странице дужине 3, а преостале четири дужине 2.

5. У једној групи ученика неки од њих се међусобно познају. При томе, два ученика који имају заједничког познаника увек познају различит број ученика те групе. Доказати да постоји ученик који познаје само једног од преосталих ученика.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Крагујевац, 14.03.1998.

Трећи разред

1. Две равни τ и σ се секу по правој a. Нека је α угао диедра који чине те две равни, а β угао између неке праве p равни τ и праве a. Ако је γ угао између праве p и равни σ, доказати:

$$\sin\gamma = \sin\alpha \sin\beta.$$

2. Нека је S непразан скуп тачака у равни и a позитиван број. Скуп S_a дефинишемо на следећи начин: тачка A припада скупу S_a ако и само ако постоји тачка $B \in S$ таква да растојање између тачака A и B није веће од a.

(а) Ако скуп S није конвексан, да ли скуп S_a може бити конвексан?

(б) Ако је скуп S конвексан, да ли скуп S_a мора бити конвексан?

3. Доказати да је

$$\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ.$$

4. Две кружнице се секу у тачкама A и B. Нека је C тачка прве кружнице различита од A и B. Означимо са D тачку пресека праве CA са другом кружницом различиту од A. Нека су M и N средишта лукова BC и BD који не садрже тачку A, а K средиште дужи CD. Доказати да је $\sphericalangle MKN$ прав.

5. Дата је функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ за коју важе следећи услови:

(i) $f(mn) = f(m)f(n)$ за све $m, n \in \mathbb{N}$;

(ii) $f(n) = 0$ за сваки природан број n чија је цифра јединица у декадном запису једнака 3;

(iii) $f(10) = 0$.

Доказати да је $f(n) = 0$ за сваки природан број n.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Крагујевац, 14.03.1998.

Четврти разред

1. Решити једначину:

$$\cos^2(x\sin x) = 1 + \log_5^2\sqrt{x^2+x+1}.$$

2. Нека је S непразан скуп тачака у равни и a позитиван број. Скуп S_a дефинишемо на следећи начин: тачка A припада скупу S_a ако и само ако постоји тачка $B \in S$ таква да растојање између тачака A и B није веће од a.

(а) Ако скуп S није конвексан, да ли скуп S_a може бити конвексан?

(б) Ако је скуп S конвексан, да ли скуп S_a мора бити конвексан?

3. Доказати да је

$$\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{tg} 80^\circ.$$

4. Одредити све тројке (a, b, c) природних бројева за које важи $a < b < c$ и

$$ac = b^2, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{1998}\,.$$

5. Дат је низ $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2+1}$ за $n \geqslant 1$. Доказати да је сваки члан низа цео број.

Време за рад 240 минута.