16. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Охрид, Македонија – 8. мај 1999.

1. Нека је D средиште краћег лука BC описаног круга оштроуглог троугла ABC. Тачке E и F су редом симетричне тачки D у односу на праву BC и центар описаног круга. Нека је K средиште дужи EA.

(а) Доказати да круг који пролази кроз средишта страница троугла ABC такође пролази кроз K.

(б) Доказати да је права кроз K и средиште странице BC нормална на AF.

(Турска)

2. Нека је $p > 2$ прост број такав да $3 \mid p-2$. Посматрајмо скуп

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant x, y \leqslant p-1\}.$$

Доказати да је највише $p-1$ елемената S дељиво са p. *(Бугарска)*

3. Нека су M, N, P подножја нормала из тежишта G оштроуглог троугла ABC на странице AB, BC, CA, тим редом. Доказати да важи

$$\frac{4}{27} < \frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} \leqslant \frac{1}{4}.$$

(Албанија)

4. Дат је низ $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots$ целих бројева такав да је за свако $k \geqslant 0$ број чланова који нису већи од k коначан (означимо тај број са y_k). Доказати да за све природне бројеве m, n важи

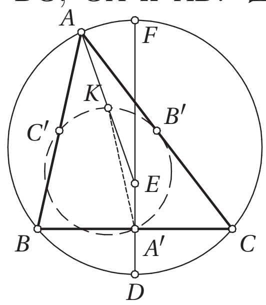
$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \geqslant (n+1)(m+1).$$

(Румунија)

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Означимо са A', B' и C' редом средишта страница BC, CA и AB. Дужи KB' и KC' су средње линије троуглова AEC и AEB, па је $\sphericalangle C'KB' = \sphericalangle BEC = \sphericalangle CDB = 180^\circ - \sphericalangle BAC = 180^\circ - \sphericalangle B'A'C'$, што значи да K лежи на кругу $A'B'C'$ - део (а).



Најзад, дуж KA' је средња линија у троуглу EAD, па је $KA' \parallel AD \perp AF$ јер је DF пречник круга ABC, што доказује део (б).

2. Пошто је $p \equiv 2 \pmod 3$, бројеви $0^3, 1^3, \dots, (p-1)^3$ дају различите остатке при дељењу са p. Заиста, ако је $a^3 \equiv b^3 \pmod p$, онда степеновањем са $\frac{p-2}{3}$ добијамо $a^{p-2} \equiv b^{p-2} \pmod p$, али како је такође $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \pmod p$, следи $a \equiv b \pmod p$.

Према томе, за свако $y \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ постоји тачно један елемент $s_y = y^2 - x^3 - 1 \in S$ дељив са p. Како је притом $s_1 = 1^2 - 0^3 - 1 = s_3 = 3^2 - 2^3 - 1 = 0$, међу елементима $s_0, s_1, \dots, s_{p-1}$ има највише $p-1$ различитих.

3. Као и обично, a, b, c су странице троугла наспрам A, B, C редом, α, β, γ одговарајући углови, и h_a, h_b, h_c висине. Како је $GM = \frac{1}{3}h_c = \frac{1}{3}a\cos\beta$, $GN = \frac{1}{3}h_a = \frac{1}{3}c\cos\beta$ и $\sphericalangle MGN = 180^\circ - \beta$, имамо $P_{GMN} = \frac{1}{18}h_c h_a \sin\beta = \frac{1}{18}ac\sin^3\beta = \frac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\beta$. Слично, $P_{GNP} = \frac{1}{9}\sin^2\gamma$ и $P_{GPM} = \frac{1}{9}\sin^2\alpha$, па сабирањем добијамо

$$P_{MNP} = \frac{1}{9}P_{ABC}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma).$$

Најзад, $K = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \sin^2\alpha + 1 - \frac{\cos 2\beta + \cos 2\gamma}{2} = 1 + \sin^2\alpha + \cos\alpha\cos(\beta - \gamma)$, па како је $\cos\alpha < \cos(\beta-\gamma) \leqslant 1$, следи $2 = 1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha < K \leqslant 1 + \sin^2\alpha + \cos\alpha = 2 + \cos\alpha - \cos^2\alpha \leqslant \frac{9}{4}$, и одатле $\frac{2}{9} < \frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} \leqslant \frac{1}{4}$.

Напомена. Позната је формула за површину педалног троугла $P_aP_bP_c$ тачке P у троуглу ABC: $P_{P_aP_bP_c} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{OP^2}{R^2}\right)P_{ABC}$, где је O центар и R полупречник описаног круга троугла ABC. Овај задатак је директна последица.

4. Обележимо све тачке (i, j) на целобројној решетки у равни са $i, j \geqslant 0$ за које је $j < x_i$. За дато i, број обележених тачака (i, j) је једнак x_i, па тако у скупу $S = \{(i, j) \mid 0 \leqslant i \leqslant n,\ 0 \leqslant j \leqslant m\}$ има највише $\sum_{i=0}^{n} x_i$ обележених тачака. С друге стране, за дато j, *необележених* тачака (i, j) са $i \geqslant 0$ има тачно y_j, тако да у скупу X има највише $\sum_{j=0}^{m} y_j$ необележених тачака. Према томе, збир $\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j$ није мањи од укупног броја тачака у X, а то је $(m+1)(n+1)$.