ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ИЗБОР ЕКИПЕ ЗА ММО

Београд, 22. мај 1999.

1. Нека је n природан број и $P(x)$ полином степена $2n$ такав да је

$$P(0) = 1 \quad \text{и} \quad P(k) = 2^{k-1} \ \text{ за } k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Доказати да је $2P(2n+1) - P(2n+2) = 1$.

2. Дат је троугао ABC са $\sphericalangle A = 90^\circ$ и $\sphericalangle B < \sphericalangle C$. Тангента на описани круг k троугла ABC у тачки A сече праву BC у D. Нека је тачка E симетрична тачки A у односу на BC, X подножје нормале из A на BE, и Y средиште дужи AX. Права BY поново сече k у Z. Доказати да права BD додирује описани круг троугла ADZ.

3. Посматрајмо скуп $A_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ од $2n$ променљивих. Колико има пермутација скупа A_n за које се свакој од $2n$ променљивих може доделити нека вредност из интервала $(0, 1)$ тако да важи:

(i) $x_i + y_i = 1$ за све i;
(ii) $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$;
(iii) $2n$ чланова пермутације чине строго растући низ?

4. За сваки природан број d, означимо са M_d скуп свих природних бројева који се не могу представити у облику збира неколико (бар два) узастопних чланова аритметичке прогресије са разликом d чији су чланови цели бројеви. Доказати да свако $c \in M_3$ може да се напише као $c = ab$, где $a \in M_1$ и $b \in M_2 \setminus \{2\}$.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.