ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло, 1999.

Припремна варијанта, 8-9. разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени	задаци
3	1. Отац и син се клизају на кружној стази. С времена на време отац престигне сина. После тога, пошто је син променио смер кретања у супротни, они су почели да се сусрећу 5 пута чешће. Колико пута отац брже клиза од сина?
4	2. Над хипотенузом AB правоуглог троугла ABC са спољашње стране је конструисан квадрат ABDE. Дато је: AC=1 cm и BC=3 cm. У ком односу дели страницу DE бисектриса угла C?
4	3. На табли је написано неколико природних бројева: a_0, a_1, a_2, ..., a_n. На другој табли пишемо следеће бројеве: b_0 – колико има укупно бројева на првој табли, b_1 – колико је таквих бројева већих од један, b_2 – колико је бројева већих од два, и т.д., док се добијају позитивни бројеви. На томе се завршава – нуле се не пишу. На трећој табли пишемо бројеве c_0, c_1, c_2, ..., добијене на основу бројева на другој табли по истом правилу по коме су бројеви b_0, b_1, b_2, ... добијени на основу бројева на првој табли. Доказати да се скупови бројева на првој и трећој табли поклапају.
5	4. У равни је нацртан црни једнакостранични троугао. Дато је девет троугаоних плочица исте те величине и истог тог облика. Треба их поставити у равни тако да се не прекривају и да свака плочица покрива бар један део црног троугла (бар једну тачку унутар њега). Како то урадити?
5	5. Квадрат је разрезан са 18 правих, од којих су 9 паралелне једној страници квадрата, а 9 – другој, на 100 правоугаоника. Испоставило се да су тачно девет од њих – квадрати. Доказати да се међу тим квадратима налазе два подударна.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролеһно коло, 1999.
Припремна варијанта, 10-11. разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени	задаци
3	1. У низу се налази 1999 бројева. Први број је једнак 1. Познато је да је сваки број, сем првог и последњег, једнак збиру два суседна. Наћи последњи број.
3	2. Над хипотенузом AB правоуглог троугла ABC са спољашње стране је конструисан квадрат ABDE. Дато је: AC=1 cm и BC=3 cm. У ком односу дели страницу DE бисектриса угла C?
3	3. На табли је написано неколико природних бројева: a_0, a_1, a_2, ... , a_n. На другој табли пишемо следеће бројеве: b_0 – колико има укупан бројева на првој табли, b_1 – колико је тамо бројева већих од један, b_2 – колико је бројева већих од два, и т.д., док се добијају позитивни бројеви. На томе се завршава – нуле се не пишу. На трећој табли пишемо бројеве c_0, c_1, c_2, ... , добијене на основу бројева на другој табли по истом правилу по коме су бројеви b_0, b_1, b_2, ... добијени на основу бројева на првој табли. Доказати да се скупови бројева на првој и трећој табли поклапају.
5	4. У равни је нацртан црни квадрат. Дато је седам квадратних плочица исте те величине. Треба их поставити у равни тако да се не прекривају и да свака плочица покрива бар један део црног квадрата (бар једну тачку унутар њега). Како то урадити?
5	5. Игра се одвија на квадрату каираног папира 9x9. Играју двоје, наизменично. Онај који започиње игру ставља на слободна поља крстиће, његов партнер – кружиће. Када се сва поља попуне, изброји се број врста и стубаца у којима има више крстића него кружића, – број K, и број врста и стубаца у којима има више кружића него крстића – број N (укупан број врста и стубаца – 18). Разлика V=K-N се сматра добитком играча који почиње игру. Одредити такву вредност B, да 1) први играч може да обезбеди себи добитак не мањи од B, ма како играо други играч; 2) други играч може увек да постигне то да први играч добије добитак не већи од B, ма како играо.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло, 1999.
Основна варијанта, 8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени	задаци
3	1. У банци се налази 500 долара. Дозволене су две операције: подићи 300 долара или уложити 198 долара. Те операције могу се вршити произвољан број пута, при том нема другог новца, осим оног који је првобитно лежао у банци. Коју је максималну суму могуће узети из банке и како то урадити.
4	2. Нека је O тачка пресека дијагонала паралелограма ABCD. Доказати: ако кружница која пролази кроз тачке A, B и D, додирује праву BC, онда кружница, која пролази кроз тачке B, C и O, додирује праву CD.
4	3. Играју двоје. Први уписује у врсту слева на десно цифру по цифру, произвољно смењујући 0 и 1. Сваки пут, после тога, пошто први упише цифру која је на реду, други размењује међу собом две цифре из већ уписаног низа (када је написана само једна цифра, други пропушта потез). Тако се поступа док цифара не буде укупно 1999. Да ли други може да постигне то, да после неговог последнег потеза распоред цифара буде симетричан у односу на средну цифру?
6	4. Круг је са 2n полупречника разложен на 2n једнаких сектора: n плавих и n црвених, који се смењују у произвољном поретку. У плаве секторе, почев од неког, уписују се у смеру супротном смеру кретана казалке на часовнику бројеви од 1 до n. У црвене секторе, почев од неког, уписују се исти ти бројеви али у смеру кретана казалке на часовнику. Доказати да се може наћи полукруг у који су уписани сви бројеви од 1 до n.
6	5. Уписана кружница троугла ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама P и Q. Нека је RS средна линија, паралелна AB, T - тачка пресека правих PQ и RS. Доказати да T лежи на бисектриси угла B тог троугла.
9	6. Топ, који прави потезе по вертикали и хоризонтали на суседно поле, у 64 потеза је обишао сва пола шаховске табле 8x8 и вратио се на почетно поле. Доказати да број потеза по вертикали није једнак броју потеза по хоризонтали.

ДВАДЕСЕТИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло 1999.
Основна варијанта, 10–11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

4 1. У мору плива предмет који има облик конвексног полиедра. Може ли се десити да се 90% његове запремине налази испод нивоа воде и да се притом више од половине његове површине налази изнад нивоа воде?

4 2. Нека је ABCD конвексан четвороугао уписан у кружницу с центром у тачки O. Кружнице описане око троуглова ABO и CDO секу се други пут у тачки F. Доказати да кружница која пролази кроз тачке A, F и D, пролази кроз пресечну тачку дужи AC и BD.

5 3. Наћи све парове целих бројева (x,y) за које је задовољен услов: бројеви x^3+y и $x+y^3$ су дељиви са x^2+y^2.

5 4. Круг је са $2n$ полупречника разложен на $2n$ једнаких сектора: n плавих и n црвених, који се смењују у произвољном поретку. У плаве секторе, почев од неког, уписују се у смеру супротном смеру кретања казалке на часовнику бројеви од 1 до n. У црвене секторе, почев од неког, уписују се исти ти бројеви али у смеру кретања казалке на часовнику. Доказати да се може наћи полукруг у који су уписани сви бројеви од 1 до n.

5. За сваки цео ненегативан број k дефинишимо број $M(k)$ на следећи начин: запишимо број k у бинарном облику; ако је број јединица у том запису паран, онда је $M(k)=0$, а ако је непаран – онда је $M(k)=1$ (почетни чланови тог низа су: 0,1,1,0,1,0,0,1,...).

2 а) Уочимо коначан низ $M(0)$, $M(1)$, ... , $M(1000)$. Доказати да број чланова тог низа, који су једнаки свом десном суседу, није мањи од 320.

5 б) Уочимо коначан низ $M(0)$, $M(1)$, ... , $M(1000000)$. Доказати да број чланова низа, таквих да је $M(k)=M(k+7)$, није мањи од 450000.

8 6. Топ, који прави потезе по вертикали и хоризонтали на суседно поље, у 64 потеза је обишао сва поља шаховске табле 8×8 и вратио се на почетно поље. Доказати да број потеза по вертикали није једнак броју потеза по хоризонтали.