17. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кишињев, Молдавија – 5. мај 2000.

1. Одредити све функције $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, такве да за све $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f\left(xf(x)+f(y)\right)=\left(f(x)\right)^2+y.$$

(Албанија)

2. Нека је ABC разностранични оштроугли троугао и E унутрашња тачка тежишне линије AD ($D\in BC$). Нека је тачка F нормална пројекција тачке E на праву BC, M унутрашња тачка дужи EF, а N и P нормалне пројекције тачке M на праве AC и AB, редом. Доказати да праве које садрже симетрале углова PMN и PEN немају заједничких тачака. *(Македонија)*

3. Наћи највећи број правоугаоника димензија $1\times 10\sqrt{2}$ које је могуће добити од правоугаоника димензија 50×90, ако је дозвољено сечење по правама паралелним ивицама датог правоугаоника. *(Југославија)*

4. Природан број r је *степен* ако се може приказати у облику $r=t^s$, где су t и s природни, $s,t\geqslant 2$. Доказати да за сваки природан број n постоји скуп природних бројева A, који задовољава следеће услове:

(i) A има n елемената;

(ii) сви елементи скупа A су степени;

(iii) за све $r_1,r_2,\ldots r_k$ ($2\leqslant k\leqslant n$) из A, број $\frac{r_1+r_2+\ldots+r_k}{k}$ је степен. *(Румунија)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

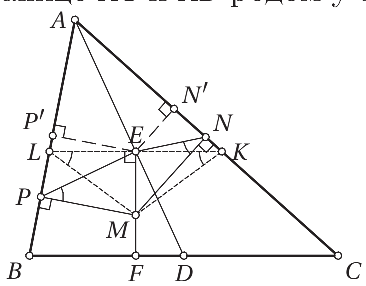
РЕШЕЊА

1. Десна страна дате једначине $(*)$ може да узме све реалне вредности, па је функција f "на". То значи да постоји c такво да је $f(c)=0$. Замена $x=c$ у $(*)$ даје $f(f(y))=y$. Сада стављањем $f(x)$ уместо x у $(*)$ добијамо $f(xf(x)+f(y))=x^2+y$, што заједно са $(*)$ даје $f(x)^2=x^2$ за све x.

Претпоставимо да постоје a и b $(ab\neq 0)$ такви да је $f(a)=-a$ и $f(b)=b$. Убацивањем $(x,y)=(a,b)$ у $(*)$ добијамо $f(-a^2+b)=a^2+b$, што је немогуће ако су $a,b\neq 0$. Дакле, једине могуће функције су $f(x)\equiv x$ и $f(x)\equiv -x$, и оне су заиста решења.

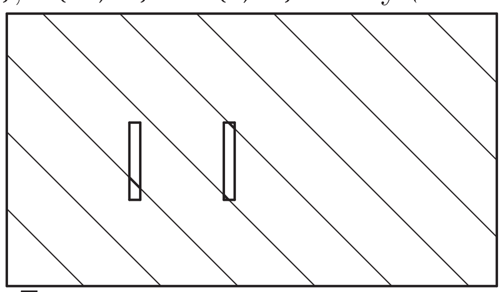
Напомена. Занимљиво је да је овај задатак *потпуно* исти као 4. задатак са Балканијаде 1997.

2. Нека права кроз E паралелна правој BC сече странице AC и AB редом у тачкама K и L. По Талесовој теореми је $EK=EL$, па је $\triangle MKL$ једнакокраки. Осим тога, четвороуглови $MENK$ и $MELP$ су тетивни, па тако имамо $\sphericalangle MNE=\sphericalangle MKE=\sphericalangle MLE=\sphericalangle MPE$.



Ако су P' и N' редом подножја нормала из E на странице AC и AB, из претходног следи $\sphericalangle PEP'=\sphericalangle NEN'$, па се симетрале углова PEN и $P'EN'$ поклапају. Како су симетрале углова $P'EN'$ и PMN паралелне, остаје још само да приметимо да се оне не поклапају: у супротном би се обе симетрале поклапале са правом ME, што је немогуће због $AB\neq AC$.

3. Нека су темена правоугаоника $A(0,0)$, $B(90,0)$, $C(90,50)$ и $D(0,50)$. Повуцимо праве $x+y=10n\sqrt{2}$ за $n=1,2,\dots,[\frac{90+50}{10\sqrt{2}}]=9$ и посматрајмо дужи које правоугаоник $ABCD$ одсеца на њима. Лако се рачуна да је укупна дужина ових дужи једнака $570\sqrt{2}-360$. Међутим, сваки правоугаоник димензија $1\times 10\sqrt{2}$ са страницама паралелним координатним осама покрива делове ових дужи у укупној дужини $\sqrt{2}$. Према томе, не можемо исећи више од $[\frac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}}]=315$ тражених правоугаоника.



Ако дати правоугаоник поделимо на правоугаонике димензија $50\times 60\sqrt{2}$ и $50\times(90-60\sqrt{2})$, видимо да се први правоугаоник може изрезати на 300 правоугаоника $1\times 10\sqrt{2}$, док се из другог може исећи још $3\cdot 5=15$ $([\frac{50}{10\sqrt{2}}]=3$ и $[90-60\sqrt{2}]=5)$. Дакле, могуће је исећи 315 правоугаоника.

4. Користићемо следеће тврђење:

Лема. За свако $k \in \mathbb{N}$ постоји $x \in \mathbb{N}$ такав да су бројеви $x, 2x, 3x, \dots, kx$ степени.

Доказ. Нека су $2 = p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ првих k простих бројева. За $i = 1, \dots, x$ напишимо $i = p_1^{r_{i,1}} p_2^{r_{i,2}} \cdots p_k^{r_{i,k}}$. Можемо да одаберемо x тако да је ix потпун p_i-ти степен за $i = 1, 2, \dots, k$. Заиста, довољно је наћи x у облику $x = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$ тако да је $s_j + r_{i,j}$ дељиво са p_i за све i, j, а такви експоненти $s_1, \dots, s_k$ постоје по Кинеској теореми о остацима. $\square$

Потражићемо скуп A у облику $\{m, 2m, \dots, nm\}$. Ако ставимо $m = n!x$, сви бројеви облика $\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}{k}$ за $r_1, \dots, r_k \in A$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ су цели и припадају скупу $B = \{x, 2x, \dots, n \cdot n!x\}$. Сада је довољно да пронађемо x такво да су сви елементи скупа B степени, а такво x постоји на основу леме.