41. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Теџон, Јужна Кореја – уторак, 18. јул 2000.

1. Кругови Γ_1 и Γ_2 секу се у тачкама M и N. Нека права AB додирује кругове Γ_1 и Γ_2 у тачкама A и B, редом, тако да је тачка M ближа правој AB него што је тачка N. Нека права која садржи тачку M и паралелна је правој AB други пут сече круг Γ_1 у тачки C, а круг Γ_2 у тачки D. Праве CA и DB секу се у тачки E, праве AN и CD у тачки P, а праве BN и CD у тачки Q. Доказати да је $EP = EQ$.
(Русија)

2. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да је

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

(САД)

3. Нека је $n \geqslant 2$ природан број. На хоризонталној правој налази се n бува које нису све у истој тачки. За позитиван број λ *потез* се дефинише на следећи начин: бирају се две буве, које се налазе у произвољним тачкама A и B, при чему је тачка A лево од B; бува из тачке A скаче у тачку C, која се на датој правој налази десно од B, тако да је $BC/AB = \lambda$.

Одредити све вредности λ тако да, за сваку тачку M на датој правој и произвољан почетни распоред n бува, постоји коначан низ потеза после којих ће се све буве наћи десно од тачке M.
(Белорусија)

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

41. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Теџон, Јужна Кореја – среда, 19. јул 2000.

4. Мађионичар има 100 карата нумерисаних бројевима од 1 до 100. Он ставља све карте у три кутије - црвену, белу и плаву, тако да свака кутија садржи бар једну карту. Гледалац из публике прво бира две кутије, а затим бира по једну карту из сваке од њих и саопштава збир бројева на изабраним картама. Знајући тај збир мађионичар одређује кутију из које није бирана карта.

На колико начина мађионичар може да распореди карте у кутије тако да овај трик увек буде успешан? (Две расподеле карата су различите ако бар једна карта није оба пута стављена у исту кутију.) *(Мађарска)*

5. Да ли постоји природан број n који је дељив са тачно 2000 различитих простих бројева, такав да је број 2^n+1 дељив са n? *(Русија)*

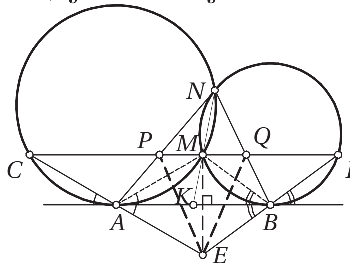
6. Нека су AH_1, BH_2, CH_3 висине оштроуглог троугла ABC. Уписани круг троугла ABC додирује странице BC, CA, AB у тачкама T_1, T_2, T_3, редом. Нека су праве ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 симетричне правим H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 у односу на праве T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2, редом. Доказати да праве ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 одређују троугао чија темена леже на уписаном кругу троугла ABC. *(Русија)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Нека се праве MN и AB секу у тачки K. По потенцији тачке је $KA^2 = KM \cdot KN = KB^2$, тј. K је средиште дужи AB, а одатле је и M средиште дужи PQ.



Како је $\sphericalangle BAM = \sphericalangle ACM = \sphericalangle EAB$ и слично $\sphericalangle ABM = \sphericalangle EBA$, тачке E и M су симетричне у односу на праву AB, па је $EM \perp AB \parallel PQ$. Следи да су троуглови EMP и EMQ подударни, тако да је $EP = EQ$.

2. Пошто је $abc = 1$, важи $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ за неке $x, y, z > 0$. Тражена неједнакост се своди на $(\frac{x-y+z}{y})(\frac{y-z+x}{z})(\frac{z-x+y}{x}) \leqslant 1$, што означавањем $p = z - x + y$, $q = x - y + z$ и $r = y - z + x$ постаје

$$8pqr \leqslant (p+q)(q+r)(r+p). \qquad (*)$$

Међу бројевима p, q, r највише један је негативан. Ако је нпр. $p < 0$, онда је лева страна $(*)$ негативна, а десна позитивна, док у случају $p, q, r \geqslant 0$ неједнакост $(*)$ следи множењем $p + q \geqslant 2\sqrt{pq}$, $q + r \geqslant 2\sqrt{qr}$ и $r + p \geqslant 2\sqrt{rp}$.

3. Показаћемо да за $\lambda \geqslant \frac{1}{n-1}$ све буве могу отићи произвољно далеко удесно. Означимо са d и δ највеће и најмање растојање између две буве у датом моменту; очигледно је $d \geqslant (n-1)\delta$. Ако крајње лева бува прескочи крајње десну, најмање растојање између две буве се неће смањити јер је $\lambda d \geqslant \delta$, а притом се позиција крајње десне буве померила удесно за бар δ. Тако низом оваквих скокова буве постижу циљ.

Нека је сада $\lambda < \frac{1}{n-1}$. Доделимо свакој буви координату њене позиције на реалној правој. Означимо са w_k и s_k редом координату крајње десне буве и збир координата свих бува после k скокова. Ако у $(k+1)$-том скоку бува из тачке a прескочи преко буве у тачки b у тачку c, онда је $s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c - b) \geqslant \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k)$. Сабирањем ових неједнакости за $k = 0, 1, \ldots, i-1$ добијамо $nw_i \geqslant s_i \geqslant s_0 + \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_i - w_0)$, тј. $(\frac{1+\lambda}{\lambda} - n)w_i \leqslant \frac{1+\lambda}{\lambda}w_0 - s_0$, што показује да је низ w_i ограничен јер је $\frac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$. Дакле, у овом случају буве не могу отићи произвољно далеко.

4. Нека су a, b, c и d карте такве да су a, b, c у различитим кутијама и $c + d = a + b$. Тада карте c и d морају да буду у истој кутији: у супротном, ако гледалац саопшти збир $a + b$, мађионичар неће моћи да дâ сигуран одговор.

Претпоставимо да су за неко i карте $i, i+1, i+2$ у различитим кутијама. Пошто је $i + (i+3) = (i+1) + (i+2)$, карте i и $i+3$ су у истој кутији; слично је и $i-1$ у истој кутији као $i+2$ (ако је $i>1$). Једноставном индукцијом се показује да су карте $1,4,7,\dots,100$ у једној кутији, карте $2,5,\dots,98$ у другој, и $3,6,\dots,99$ у трећој. Тако у овом случају имамо 6 могућих расподела.

Претпоставимо сада да никоје три узастопне карте нису у различитим кутијама. Нека је карта 1 у кутији A и нека су b и c редом карте са најмањим бројем у кутијама B и C, где је нпр. $b<c$. Карта $b-1$ је у кутији A, па по претпоставци $b+1$ није у C; дакле, $c>b+1$. Ако је сада $c<100$, онда из $b+c=(b-1)+(c+1)$ следи да је $c+1$ у A, али онда из $b+(c+1)=(b+1)+c$ следи да је $b+1$ у C, контрадикција. Према томе, $c=100$, и то је једина карта у C. Даље, због $99+b=100+(b-1)$, карта 99 је у B. Сада кутија A не може да садржи ниједну од карата k за $2\leqslant k\leqslant 99$, јер би иначе због $99+k=100+(k-1)$ следило да је $k-1$ у C, што је немогуће. Дакле, у A је само карта 1, а карте $2,3,\dots,99$ су у B. И у овом случају има 6 могућих расподела, па је укупан број тражених расподела 12.

5. Доказаћемо индукцијом по k да за свако $k\in\mathbb{N}$ постоји $n_k\in\mathbb{N}$ које има тачно k различитих простих делилаца такав да $n_k\mid 2^{n_k}+1$ и $3\mid n_k$.

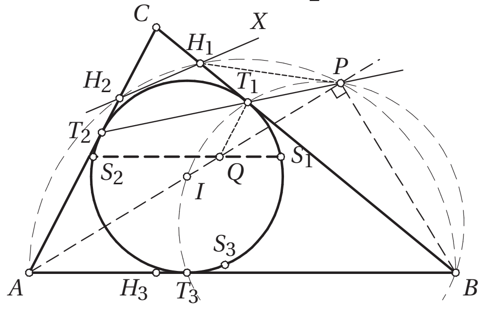
За $k=1$, $n_1=3$ задовољава услов. Претпоставимо да је $k\geqslant 1$ и $n_k=3^{\alpha}m$, где $3\nmid m$, па m има $k-1$ простих делилаца. Тада број $3n_k=3^{\alpha+1}m$ има тачно k простих делилаца и $2^{3n_k}+1=(2^{n_k}+1)(2^{2n_k}-2^{n_k}+1)$ је дељиво са $3n_k$, јер $3\mid 2^{2n_k}-2^{n_k}+1$. Одабраћемо прост број p који не дели n_k тако да буде $n_{k+1}=3pn_k$. Довољно је узети p тако да $p\mid 2^{3n_k}+1$ и $p\nmid 2^{n_k}+1$.

Остаје да приметимо да за сваки цео број $a>2$ постоји прост број p који дели $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$, а не дели $a+1$. Заиста, због $a^2-a+1=(a+1)(a-2)+3$ је нзд$(a^2-a+1,a+1)\mid 3$ и $3^2\nmid a^2-a+1$, па за p можемо узети било који прост делилац броја a^2-a+1 већи од 3.

Напомена. Услов $3\mid n_k$ је сувишан: може се доказати (нпр. посматрањем најмањег простог делиоца n) да, ако је $n>1$ природан број и $n\mid 2^n+1$, онда $3\mid n$.

6. Углове троугла ABC означавамо уобичајено са α,β,γ. Нека је I центар уписаног круга троугла ABC и нека су S_1,S_2,S_3 редом тачке симетричне тачкама T_1,T_2,T_3 у односу на праве AI,BI,CI. Доказаћемо да је тражени троугао управо $S_1S_2S_3$.

Нека права AI сече праву T_1T_2 у тачки P. Како је $\sphericalangle BIP=90^\circ-\frac{\gamma}{2}=\sphericalangle BT_1P$, четвороугао BIT_1P је тетиван, па важи $\sphericalangle APB=\sphericalangle IT_1B=90^\circ$. Одавде следи да су тачке A,B,P,H_1 концикличне, па је $\sphericalangle APH_1=\sphericalangle ABH_1=\beta=2\sphericalangle IBT_1=2\sphericalangle APT_1$, што значи да су праве H_1P и AP симетричне у односу на праву T_1T_2. Следи да тачка $Q\in\ell_3$ симетрична тачки H_1 у односу на T_1T_2 лежи на правој AP.



Сада имамо $\sphericalangle T_1QS_1 = 2\sphericalangle T_1QP = 2\sphericalangle T_1H_1P = 2\sphericalangle BAP = \alpha = \sphericalangle CH_1H_2 = \sphericalangle T_1H_1X$ за произвољну тачку X на правој H_1H_2 $(H_2 - H_1 - X)$, одакле закључујемо да је права QS_1 симетрична правој H_1H_2 у односу на T_1T_2, тј. $S_1 \in \ell_3$. Аналогно је $S_2 \in \ell_3$, $S_1, S_3 \in \ell_2$ и $S_2, S_3 \in \ell_1$.

Напомена. Лако се види да су праве ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 редом паралелне страницама BC, CA и AB, па се и одавде може наслутити да се ради о троуглу $S_1S_2S_3$.