Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Први разред – А категорија

1. Да ли се раван може поплочати (потпуно покрити без преклапања) квадратима од којих највише два могу имати једнаке странице?

2. Миљан и Младен играју следећу игру: наизменично бирају делиоце броја 200, али тако да број који изаберу не дели ниједан од већ претходно изабраних бројева. Игру губи онај играч који каже број 200. Миљан почиње игру. Како треба да игра да би победио Младена?

3. Ако у троуглу ABC важи $\sphericalangle A = 60^\circ$, тада површина овог троугла износи $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2-(b-c)^2\right)$, где су a, b, c дужине страница BC, CA, AB, редом. Доказати.

4. Наћи збир свих седмоцифрених бројева записаних цифрама $1, 2, 3, 3, 4, 4, 4$.

5. Наћи све реалне бројеве a, b, c, d тако да важи:

$$\begin{aligned} abc+ab+bc+ca+a+b+c &= 2,\\ bcd+bc+cd+db+b+c+d &= 5,\\ cda+cd+da+ac+c+d+a &= 7,\\ dab+da+ab+bd+d+a+b &= 11. \end{aligned}$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Други разред – А категорија

1. У целим бројевима решити једначину: $7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2$.

2. Решити једначину $\cos^5 x - \sin^5 x = 1$.

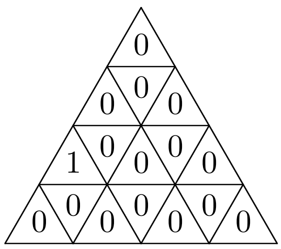
3. Нека су M и N средишта страница AD и BC правоугаоника $ABCD$, редом. Ако је P тачка на продужетку странице CD иза тачке D, а Q је пресек правих PM и AC, доказати да је $\sphericalangle QNM = \sphericalangle MNP$.

4. Нека су a, b и c странице троугла ABC. Доказати да важи неједнакост

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \leqslant 2Rr\sqrt{3},$$

где су R и r редом полупречници описаног и уписаног круга овог троугла.

5. Једнакостранични троугао странице 4 подељен је на 16 малих једнакостраничних троуглова странице 1 и у сваки је уписан по један број као што је приказано на слици. Дозвољено је истовремено додати 1 или одузети 1 вредностима уписаним у троуглове који су у "траци" између две "суседне" праве паралелне некој од страница троугла (тиме се мења вредност у 1, 3, 5 или 7 малих троуглова). Да ли се применом коначно много оваквих операција може постићи да у свим малим троугловима буде уписан исти број?



Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Трећи разред – А категорија

1. У биолошкој лабораторији посматра се утицај једне врсте вируса на неке бактерије. Познато је да се сваке секунде дешава следећи процес: вируси нападају сваки по јдну бактерију и усмрћују је, при чему од сваког вируса настају два, док се свака ненападнута бактерија подели на две нове бактерије. Ако је у посуду са 2000 бактерија тачно у подне додат један вирус, одредити тренутак када ће све бактерије изумрети.

2. Доказати да је запремина правилне пирамиде мања од куба њене бочне ивице.

3. Коју највећу, а коју најмању вредност може да има производ $\cos x \cos y$, ако је познато да је $\sin x \sin y = b$, где је b дати реалан број ($|b| \leqslant 1$)?

4. Познато је да је $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ и да је $1^3 + 5^3 + 7^3 + 12^3 = 13^3$. Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 3$ постоје природни бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ такви да важи

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = b^3.$$

5. Ако се у оштроуглом троуглу ABC бисектриса унутрашњег угла код темена A, тежишна дуж из темена B и висина из темена C секу у једној тачки, доказати да важи $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\beta}$ (α, β и γ су унутрашњи углови код темена A, B и C, редом).

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Четврти разред – А категорија

1. Сфера S полупречника r садржи центар O сфере Σ полупречника R, при чему је $R > 2r$. Тетива EF сфере Σ је уједно тангента сфере S у тачки T. Доказати неједнакост $ET^2 + TF^2 \leqslant 2R^2 + r^2$.

2. Ако су m и n природни бројеви, доказати неједнакост:

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} \geqslant 1.$$

3. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ дати реални бројеви ($n \geqslant 2$). Доказати да једначина

$$x^n + a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - a_3 x^{n-3} - \cdots - a_n = 0$$

има тачно једно позитивно реално решење.

4. Познато је да је $10001 = 137 \cdot 73$ сложен број. Проверити да ли су и сви бројеви 100010001, 1000100010001, 10001000100010001, $\ldots$ сложени.

5. Ако за реалан број a различит од $0, 1, -1$ и целе бројеве m, n, p, q важи

$$a^m + a^n = a^p + a^q \quad \text{и} \quad a^{3m} + a^{3n} = a^{3p} + a^{3q},$$

тада је $m = p$, $n = q$ или $m = q$, $n = p$. Доказати.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Први разред – Б категорија

1. Миљан и Младен играју следећу игру: наизменично бирају делиоце броја 1000, али тако да број који изаберу не дели ниједан од већ претходно изабраних бројева. Игру губи онај играч који каже број 1000. Миљан почиње игру. Како треба да игра да би победио Младена?

2. Колико има парова (m, n) целих бројева за које важи

$$m^3 + 6m^2 + 5m = 8n^3 + 36n^2 + 40n + 8?$$

3. На страницама AB, BC, CA једнакокраког правоуглог троугла ($\sphericalangle C = 90°$) дате су, редом, тачке R, S, T тако да важи $AR : RB = BS : SC = CT : TA = 1 : 2$. Доказати да је троугао RST једнакокрак.

4. У равни је дато n тачака. Из сваке тачке полази по 2000 вектора до осталих тачака и у свакој тачки завршава 2000 вектора из осталих тачака. Доказати да је збир свих ових вектора једнак нули.

5. Доказати да не постоје реални бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_{18}$ тако да је $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{18} \leqslant 2000$ и да никоја три узастопна броја нису дужине страница неког троугла.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Други разред – Б категорија

1. У целим бројевима решити једначину: $7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2$.

2. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} x^{1999} + y^{1999} = 1 \\ x^{2000} + y^{2000} = 1. \end{cases}$$

3. Права паралелна страници AB троугла ABC одсеца од њега троугао KMC. Нека је L произвољна тачка странице AB. Израчунати површину четвороугла $KLMC$, ако је S површина троугла ABC и Q површина троугла KMC.

4. Доказати да за $x \geqslant 0$ важи неједнакост $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geqslant 2^{\sqrt[6]{x}+1}$.

5. Доказати једнакост: $\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{2000} - \underbrace{222\ldots2}_{1000}} = \underbrace{333\ldots3}_{1000}$.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити неједначину:

$$(\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x + 2)(\sin^4 x + \cos^4 x) \leqslant \frac{3}{4}\,.$$

2. У четвороуглу $ABCD$ страница AB је паралелна страници CD и важи $AB = AC = AD = \sqrt{2}$ и $BC = \sqrt{3}$. Наћи дужину дијагонале BD.

3. Доказати да за свака два рационална броја p, q важи

$$\left|\frac{\sin p - \sin q}{1 - \sin p \sin q}\right| < 1.$$

4. Доказати да је запремина праве купе мања од куба њене изводнице.

5. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} \log_2(y-x) - \log_8(3y-5x) = 0 \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2000.

Четврти разред – Б категорија

1. Нека су на полукругу полупречника 1 редом распоређене тачке A, B, C, D, E, при чему су A и E крајеви пречника. Доказати да важи:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE < 4.$$

2. Наћи све целе бројеве x, y такве да важи $\sin^3 \dfrac{(x^2+y^2)\pi}{2} + 1 = 0$.

3. Наћи све реалне бројеве a, b, c, d тако да важи:

$$\begin{aligned} abc + ab + bc + ca + a + b + c &= 2, \\ bcd + bc + cd + db + b + c + d &= 5, \\ cda + cd + da + ac + c + d + a &= 7, \\ dab + da + ab + bd + d + a + b &= 11. \end{aligned}$$

4. За какве реалне бројеве x и α је задовољена неједнакост

$$\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \leqslant 0?$$

5. Доказати да за сваки природан број $n > 2$ важи $\sqrt[n]{n!} > \sqrt{n}$.

Време за рад 180 минута.