Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2000.

Први разред – А категорија

1. Ако се троугао може разложити на два међусобно подударна троугла, онда је он једнакокраки. Доказати.

2. У декадном запису датог броја n појављују се само цифре 1, 3, 7 и 9 (свака бар једном). Доказати да је пермутовањем цифара овог броја могуће добити број дељив са 7.

3. На колико начина се из скупа $\{1, 2, \ldots, 1999\}$ може изабрати 1000 бројева тако да међу њима не постоје два чији збир је једнак 1999 или 2000?

4. Да ли постоји троугао површине 1 чије странице b и c задовољавају $c \leqslant b$, $b = 1,4$?

5. Дате су две операције F и G које преводе дату уређену тројку реалних бројева у другу тројку по следећим правилима:

F преводи тројку (a, b, c) у тројку $(a + 1, b + c, c + 1)$,

G преводи тројку (a, b, c) у тројку $(a, b - 1, c + 1)$.

Да ли је могуће, примењујући коначно много пута операције F и G, превести тројку $(3, 4, 1)$ у тројку $(6, 5, 8)$?

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2000.

Други разред – А категорија

1. Нека је O центар уписаног круга, а O_1 центар приписаног круга код странице BC троугла ABC. Доказати да важи $AO \cdot AO_1 = AB \cdot AC$.

2. Дате су квадратне једначине $x^2 - x + m = 0$ и $x^2 - x + 3m = 0$ $(m \neq 0)$. Одредити вредност m тако да једно решење друге једначине буде једнако двострукој вредности једног решења прве једначине.

3. Дато је 20 различитих природних бројева не већих од 70. Доказати да међу разликама тих бројева има бар четири једнаке (посматра се увек позитивна разлика).

4. За $a, b > 0$ доказати неједнакост: $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^8 \geqslant 64ab(a+b)^2$.

5. У кружни исечак од 90° (четвртина круга) полупречника 25 уписан је правоугаоник чији је однос дужина страница $6:1$, тако да му два темена припадају луку исечка, а остала два леже на полупречницима исечка. Одредити странице правоугаоника.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2000.

Трећи разред – А категорија

1. Колико има функција $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ за које важи $f(1) \leqslant f(2) \leqslant \dots \leqslant f(n)$?

2. Решити једначину $\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3$.

3. Дат је полиедар површине S у који се може уписати сфера и око кога се може описати сфера. Сфера уписана у овај полиедар има полупречник r, а сфера описана око полиедра полупречник R. Доказати да важи

$$R > \sqrt[3]{\frac{rS}{4\pi}}.$$

4. Нека је O центар описаног круга датог оштроуглог троугла ABC. Ако су A_1, B_1 и C_1 редом средишта страница BC, AC и AB овог троугла, доказати да је $OA_1 + OB_1 + OC_1 = R + r$, где је R полупречник описаног круга око троугла ABC, а r је полупречник уписаног круга у исти троугао.

5. Доказати да је, за сваки природан број n, број $\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ цео.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2000.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати да за реалне бројеве a, b, n, p такве да је $a > b > 0$ и $p > n$ важи неједнакост:

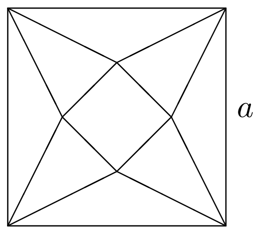
$$\frac{a^p - b^p}{a^p + b^p} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \ .$$

2. Шта је веће:

а) e^π или π^e?

б) π^{e^π} или e^{π^e}?

3. Из квадратног парчета картона странице a изрезана је мрежа праве правилне четворостране пирамиде (као на слици) тако да се при састављању темена квадрата састају у врху пирамиде. Колика треба да буде основна ивица пирамиде да би њена запремина била максимална?



4. За какве природне бројеве n постоји природан број m тако да n дели све бројеве $m+1,\ m^m+1,\ m^{m^m}+1,\ \ldots,\ m^{m^{\cdot^{\cdot^{\cdot^m}}}}+1,\ \ldots$?

5. На траци од папира написан је низ од 360 цифара: $\underbrace{123123\ldots123}_{360}$. Који је највећи број делова на које се трака може расећи тако да сви бројеви на добијеним деловима буду међусобно различити?

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

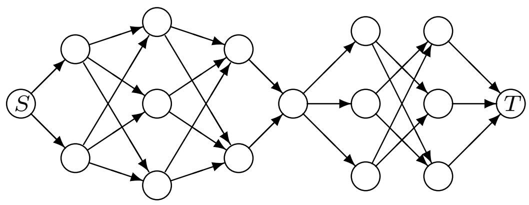
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2000.

Први разред – Б категорија

1. Нека је A троцифрен број са међусобно различитим цифрама. Пермутовањем цифара броја A добијено је још пет троцифрених бројева. Збир свих шест бројева је три пута већи од броја коме су све три цифре једнаке цифри стотина броја A. Одредити број A.

2. На следећој шеми дозвољено је кретати се путевима у смеру стрелица:



На колико начина се може стићи од чвора S до чвора T?

3. Одредити све парове целих бројева x, y такве да је $xy + 3x - 5y - 5 = 0$.

4. Решити једначину $||x| - a| + ||x| + a| = 2a$, где је a дати реалан број.

5. На колико начина се на доњој слици може прочитати реч *СРБИЈА*? Притом, дозвољено је при читању прећи са неког слова на њему суседно слово с десне стране или на слово *испод* тог суседног (а не и на слово изнад суседног).

С
С Р
С Р Б
С Р Б И
С Р Б И Ј
С Р Б И Ј А

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2000.

Други разред – Б категорија

1. Доказати да је $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

2. Дате су квадратне једначине $x^2-x+m=0$ и $x^2-x+3m=0$ $(m \neq 0)$. Одредити вредност m тако да једно решење друге једначине буде једнако двострукој вредности једног решења прве једначине.

3. На страницама BC и CD квадрата $ABCD$, редом, дате су тачке M и K тако да важи $\sphericalangle BAM=\sphericalangle MAK$. Доказати да је $AK=BM+KD$.

4. Одредити све парове x, y реалних бројева за које важи

$$x^2+y^2=1 \quad \text{и} \quad x<\sqrt{y-\frac{5}{16}}\,.$$

5. Наћи све комплексне бројеве z за које важи $-z(z+2)=|z+1|+1$.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2000.

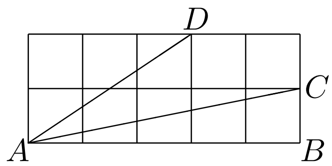
Трећи разред – Б категорија

1. Решити неједначину $\ln(3+2x-x^2+e^2)<2$.

2. Доказати да за углове α, β, γ произвољног троугла важи неједнакост:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}\ .$$

3. Доказати да је збир углова BAC и BAD у квадратној мрежи 5×2 (на слици) једнак $45°$.



4. Дата је права правилна тространа пирамида висине H. Ако је s дужина бочне ивице ове пирамиде и h висина бочне стране која одговара основној ивици, доказати неједнакост $sH^3 \leqslant h^4$.

5. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} xyz=16 \\ \dfrac{xz^2}{y}=4 \\ xyz^4=2. \end{cases}$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

05.02.2000.

Четврти разред – Б категорија

1. За какве природне бројеве n је број $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)$ дељив са $1 + 2 + \cdots + n$?

2. Решити неједначину:

$$\left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1\right)(\log_5 x - 1) + \frac{1}{x}\left(\sqrt{8x - 2x^2 - 6} + 1\right) \leqslant 0.$$

3. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} x + y + z & = & 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 & = & 10. \end{cases}$$

4. Дато је пресликавање $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ (z је комплексан број различит од $-i$). Ако је H подскуп комплексне равни задат са $H = \{z \mid \Im z > 0\}$, одредити скуп свих слика елемената из H при пресликавању f.

5. Ако за низ $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ ненегативних реалних бројева постоји реалан број Δ такав да за сваки природан број n важи

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{\Delta},$$

доказати да је тај низ аритметички.

Време за рад 180 минута.