Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Први разред – А категорија

1. Нека је $ABCD$ паралелограм у коме је $\sphericalangle A < 90^\circ$. Ако је E тачка у равни таква да је $EA \perp AB$ и $EC \perp CB$, доказати да су углови AED и CEB подударни.

2. Дат је оштроугли троугао ABC. Конструисати (лењиром и шестаром) унутар овог троугла тачку P такву да пресеци полуправих AP, BP и CP са описаним кругом око троугла ABC буду темена једнакостраничног троугла.

3. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ позитивни реални бројеви чији је збир 1. Ако је

$$S = \frac{a_1^2}{2a_1} + \frac{a_1a_2}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{a_1a_n}{a_1+a_n} + \frac{a_2a_1}{a_2+a_1} + \frac{a_2^2}{2a_2} + \cdots + \frac{a_2a_n}{a_2+a_n} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{a_na_1}{a_n+a_1} + \frac{a_na_2}{a_n+a_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{2a_n}$$

(S је збир свих израза облика $\dfrac{a_ia_j}{a_i+a_j}$ за $1 \leqslant i, j \leqslant n$), доказати да је $S \leqslant \frac{n}{2}$.

4. На острву има 45 камелеона: 17 жутих, 15 сивих и 13 плавих. Они лутају острвом сусрећући се повремено. При сваком сусрету присутна су само два камелеона. Ако се сретну два камепелона исте боје, њихова боја остане непромењена. Ако се сретну два камелеона различите боје, оба мењају боју у трећу (нпр. ако се сретну жути и сиви камелеон, оба мењају боју у плаво). Може ли се десити да од једног момента (па надаље) сви камелеони на острву имају исту боју?

5. Нека су a, b, c, d, x, y позитивни реални бројеви за које је

$$a + 2ay + y = b + 2bx + x \quad \text{и} \quad x + 2xd + d = y + 2yc + c.$$

Доказати да важи $a + 2ad + d = b + 2bc + c$.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Други разред – А категорија

1. Дат је троугао ABC. Тачка D се налази на полуправој BA тако да је $BD = BA+AC$, док тачке K и M припадају страницама BA и BC, редом, тако да троуглови BDM и BCK имају једнаке површине. Ако је $\sphericalangle BAC = \alpha$, одредити $\sphericalangle BKM$.

2. Доказати да за позитивне реалне бројеве a_1, a_2, a_3, a_4 важи неједнакост

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+a_4}+\frac{a_2}{a_3+a_4+a_1}+\frac{a_3}{a_4+a_1+a_2}+\frac{a_4}{a_1+a_2+a_3} \geqslant \frac{4}{3}$$

и да једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

3. Ако су a и b дати реални бројеви, наћи све парове (x, y) реалних бројева који задовољавају следећи систем једначина:

$$\begin{cases} x^3y + xy^3 &= ax + by \\ 2x^2y^2 &= bx + ay. \end{cases}$$

4. Колико има пермутација $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ таквих да за свако $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ важи $f(j) \leqslant j + 1$?

5. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена B. Трисектрисе угла (полуправе које га деле на три подударна угла) код темена A деле наспрамну катету BC на три дужи, од којих је најдужа двоструко дужа од најкраће. Одредити углове троугла ABC.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Трећи разред – А категорија

1. Дати су природни бројеви q, n и r, $r \leqslant n$. Доказати да $r!$ дели број

$$(q^n - 1)(q^n - q)\cdots(q^n - q^{r-1}).$$

2. За какве $a, b \in \mathbb{R}$ систем једначина

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

има решења?

3. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Израчунати угао између равни AB_1C_1 и A_1B_1C.

4. Нека је k природан број већи од 1. Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задат је са

$$x_1 = 1, \quad x_2 = k, \quad x_n = kx_{n-1} - x_{n-2}.$$

Доказати да за свако $n \in \mathbb{N}$ постоји $m > n$ тако да су $x_m - 1$ и x_n узајамно прости.

5. Наћи максималну вредност детерминанте трећег реда у којој су тачно два елемента једнака 4, а остали су из скупа $\{1, -1\}$.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Четврти разред – А категорија

1. Дати су природни бројеви q, n и r, $r \leqslant n$. Доказати да $r!$ дели број

$$(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{r-1}).$$

2. За какве $a, b \in \mathbb{R}$ систем једначина

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \sin x + \sin y = b \end{cases}$$

има решења?

3. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост $\{n\sqrt{2}\} > \dfrac{1}{2n\sqrt{2}}$.
(Са $\{\alpha\}$ је означен разломљени део броја α, тј. $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$, где је $[\alpha]$ највећи цео број који није већи од α.)

4. Под *одстојањем тачке M од фигуре* Φ подразумева се најмање од растојања MN, где је $N \in \Phi$. Ако је дат троугао ABC, доказати да је скуп тачака равни које су ближе тачки A него затвореној дужи BC, у односу на горе дефинисано одстојање, конвексан.

5. Описати све непразне коначне подскупове S интервала $[0, \infty]$ такве да за свака два (не обавезно различита) елемента $x, y \in S$ важи $x + y \in S$ или $|x - y| \in S$.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Први разред – Б категорија

1. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве да је $f(1) = 1$ и $f(f(n) + n) = f(n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

2. Наћи све тројке целих бројева које задовољавају следеће две једначине:

$$x + y + z = 0,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = -18.$$

3. Дат је четвороугао $ABCD$. Средишта страница AD и BC означена су са M и N, редом. Ако права BD полови дуж MN, доказати да полови и дијагоналу AC овог четвороугла.

4. Наћи сва целобројна решења једначине

$$x^{2000} + px^{1999} + q = 0,$$

где су p и q непарни цели бројеви.

5. Ако се у датом троуглу саберу по две висине, три тако добијена збира су у односу $27 : 32 : 35$. Одредити највећи угао овог троугла.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Други разред – Б категорија

1. Решити систем једначина:

$$\begin{cases} 2x_1^4 = x_2^2(1+x_1^4) \\ 2x_2^4 = x_3^2(1+x_2^4) \\ \vdots \\ 2x_n^4 = x_1^2(1+x_n^4) \end{cases}$$

($x_1, \ldots, x_n$ су реални бројеви).

2. Решити једначину

$$4x^2 - 40[x] + 51 = 0,$$

где је са $[x]$ означен највећи цео број који није већи од x.

3. На вертикалном торњу висине H налази се антена висине h ($h > H$). Колико далеко од подножја торња мора да стане посматрач да би торањ и антену видео под једнаким угловима?

4. Ако је n природан број већи од 1 и $x = \dfrac{1+n^2}{2n}$, доказати да је вредност израза

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$$

цео број.

5. Доказати једнакост:

$$\left(\sqrt[5]{\frac{1}{5}} + \sqrt[5]{\frac{4}{5}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{8}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Трећи разред – Б категорија

1. Да ли постоје четири тачке A, B, C, D у простору тако да важи $AB = CD = BD = 4$, $AC = 3$, $BC = AD = 5$?

2. У троуглу ABC са оштрим углом код темена C, над средњом линијом DE паралелном AB као пречником конструисан је круг који сече странице AC и BC, редом, у тачкама M и N. Изразити дужину дужи MN преко $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$.

3. Доказати да растојања произвољне тачке круга описаног око квадрата до четири темена тог квадрата не могу сва бити рационални бројеви.

4. Ако су x, y, z позитивни реални бројеви различити од 3 и ако је

$$y = 3^{\frac{1}{1-\log_3 x}} \quad \text{и} \quad z = 3^{\frac{1}{1-\log_3 y}},$$

доказати да је $x = 3^{\frac{1}{1-\log_3 z}}$.

5. Наћи максималну вредност детерминанте трећег реда у којој су тачно два елемента једнака 4, а остали су из скупа $\{1, -1\}$.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2000.

Четврти разред – Б категорија

1. Дата је функција f која свакој тачки неке равни додељује по један реалан број. Познато је да је збир вредности ове функције у теменима ма ког правилног многоугла те равни једнак нули. Доказати да функција f има вредност 0 у свакој тачки.

2. Наћи све природне бројеве x и y за које важи

$$x^3 - y^3 = xy + 25.$$

3. Дате су функције

$$f(x) = \operatorname{arctg} x^2 \quad \text{и} \quad g(x) = \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} - 1) - \operatorname{arctg}(x\sqrt{2} + 1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Доказати да је разлика ових функција константа и одредити ту константу.

4. У квадратној таблици $n \times n$ уписани су бројеви $1, 2, \ldots, n^2$, редом (у првој врсти, редом: $1, 2, \ldots, n$; у другој: $n+1, n+2, \ldots, 2n$; ... у последњој: $n^2 - n + 1, n^2 - n + 2, \ldots, n^2$). Изабрано је n од ових бројева тако да никоја два нису у истој врсти или у истој колони таблице. Доказати да сума изабраних бројева не зависи од њиховог избора и одредити ту суму.

5. У равни су дате две различите тачке A и B. Одредити геометријско место тачака M у тој равни за које важи:

$$AM \cdot BM \cdot \cos\sphericalangle AMB = \frac{3}{4} AB^2.$$

Време за рад 240 минута.