САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Неготин, 15. април 2000.

Први разред

1. На почетку се у епрувети налази једна амеба. Сваке секунде дешава се једна од следеће две промене: или се неколико амеба деле, свака на по седам нових амеба, или тачно једна амеба умире. За које најмање време у епрувети може да буде тачно 2000 амеба?

2. Нека је

$$S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{1}{1+2}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+2000}}.$$

Доказати да је $S > 1003$.

3. Праве a, b, c, редом паралелне страницама BC, CA, AB троугла ABC, повучене су кроз тачку O унутар троугла. Нека a сече AB, AC у C_2, B_1, b сече BC, BA у A_2, C_1, и c сече CA, CB у B_2, A_1, редом. Доказати да троуглови $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ имају једнаке површине.

4. Темена многоугла у координатној равни имају целобројне координате, а дужине свих страница су природни бројеви. Доказати да је обим многоугла паран број.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Неготин, 15. април 2000.

Други разред

1. Нека је $ABCD$ тетивни четвороугао. Доказати да је

$$|AB - CD| + |BC - DA| \geq 2|AC - BD|.$$

2. За дато $n \in \mathbb{N}$, колико има низова $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ цифара из скупа $\{0, 1, 2, 3\}$, таквих да за свако $i = 1, 2, \ldots, n-1$ уређени пар (x_i, x_{i+1}) није један од парова $(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 3)$?

3. Међу тачкама $1, 2, \ldots, 2n$ на бројевној правој, њих n је обојено плавом, а преосталих n црвеном бојом. Нека су $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ плаве, а $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ црвене тачке. Доказати да збир

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_n - b_n|$$

не зависи од бојења и израчунати га.

4. Доказати да се сваки позитиван рационалан број може представити у облику $\dfrac{a^3 + b^3}{c^3 + d^3}$, где су a, b, c и d природни бројеви.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Неготин, 15. април 2000.

Трећи и четврти разред

1. Нека су a и b мимоилазне праве одређене са по два темена коцке, и нека су $P \in a$ и $Q \in b$ тачке такве да је PQ нормално на a и b. Ако су M и N темена коцке на правој a, наћи све могуће вредности односа MP/PN.

2. Таблица 8×8 попуњена је бројевима $1, 2, \ldots, 64$. За свака два броја a, b са $a > b$ који се налазе у истој врсти или колони израчунат је количник a/b. Назовимо *карактеристиком* таблице најмањи од ових разломака. Одредити највећу могућу вредност карактеристике.

3. Означимо са S скуп свих простих бројева p таквих да у децималном запису $1/p$ има основни период дељив са 3. За свако $p \in S$, напишимо $1/p = 0.\overline{c_1 c_2 \ldots c_{3r}}$, где је $3r$ основни период $1/p$, и дефинишимо

$$f(k, p) = c_k + c_{k+r} + c_{k+2r}$$

за све $k = 1, 2, \ldots, r$. Наћи највећу вредност $f(k, p)$ по свим $p \in S$ и k.

4. Доказати да за сваки природан број n важи једнакост

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{2n-i}{i} 2^{2n-2i} = 2n + 1.$$

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.