ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, 24. октобар 1999.
Припремна варијанта, 8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени задаци

2 1. а) Папирни троугао је пресавијен по правој, тако да се теме правог угла поклопи са другим теменом. У ком односу дели дијагонале добијеног четвороугла тачка њиховог пресека?

2 б) Папирни троугао површине 1 пресавијен је по правој, тако да се теме правог угла поклопи са другим теменом. Добијени четвороугао је пресечен по дијагонали која полази из трећег темена полазног троугла. Наћи површину најмањег од тако добијених комада папира.

2. Разматрају се тројке целих бројева a, b и c, које задовољавају услов $a+b+c=0$. За сваку такву тројку рачуна се број

$$d=a^{1999}+b^{1999}+c^{1999}.$$

2 а) Може ли се десити да је $d=2$?
2 б) Може ли се десити да је d прост број?
(Простим се назива цео број већи од 1, који нема делитеља различитих од њега самог и јединице; први прости бројеви су: 2, 3, 5, 7, 11, ...)

4 3. У равни је дато n правих. Свака се сече с тачно 1999 преосталих. Наћи n. (Одредити све могућности.)

4 4. У Италији производе часовнике чије казаљке које показују часове праве један обрт дневно, а казаљке које показују минуте - 24 обрта, при чему су, као и обично, казаљке које показују минуте дуже од казаљки које показују часове (код обичног часовника казаљка која показује часове прави два обрта дневно, а казаљка која показује минуте - 24). Разматрајмо све положаје двеју казаљки и нултог подеока, који се могу срести и на италијанском и на обичном часовнику. Колико таквих положаја постоји у току једног дана? (Нулти подеок означава 24 часа на италијанском часовнику и 12 часова на обичном часовнику.)

4 5. Дате су плочице (правоугаоници изрезани од картона) димензија 2x1. На свакој плочици је нацртана једна дијагонала. Постоје две врсте плочица, с обзиром да се дијагонала може одабрати на два начина, при чему има довољно плочица обе врсте. Могу ли се одабрати 18 плочица и од њих сложити квадрат 6x6, тако да се крајеви дијагонала не поклапају?

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, 24.октобар 1999.
Припремна варијанта, 10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
4	1. Тачка пресека бисектриса углова троугла повезана је са теменима и као резултат тога троугао је разложен на 3 мања троугла. Један од мањих троуглова је сличан полазном. Наћи његове углове.
4	2. Доказати да постоји бесконачно много целих позитивних непарних бројева n, за које је број 2^n+n сложен. (Сложеним се назива цео позитиван број који има делиоце различите од њега самог и од јединице.)
4	3. У простору је дато n равни. Свака се сече с тачно 1999 преосталих. Наћи n. (Одредити све могућности.)
4	4. Могу ли се одабрати на бројевној оси 50 одсечака (дозвољено је да се прекривају), тако да буду испуњена два услова: а) дужине одсечака су 1, 2, 3, ... , 50; б) крајеви одсечака су сви цели бројеви од 1 до 100 укључујући и њих.
4	5. Дате су плочице (правоугаоници изрезани од картона) димензија 2x1. На свакој плочици је нацртана једна дијагонала. Постоје две врсте плочица, с обзиром да се дијагонала може одабрати на два начина, при чему има довољно плочица обе врсте. Могу ли се одабрати 36 плочица и од њих сложити квадрат 8x8, тако да се крајеви дијагонала не поклапају?

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло, Основна варијанта, 31. октобар 1999.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
3	**1.** Неколико узастопних природних бројева је записано у врсту у таквом поретку, да је сума произвољне тројке узастопних бројева дељива крајњим левим бројем те тројке. Која је максимална количина бројева могла бити записана?
	2. Нека је ABC - оштроугли троугао, C' и A' - произвољне тачке страница AB и BC редом, B' - средиште странице AC.
2	а) Доказати да површина троугла $A'B'C'$ није већа од половине површине троугла ABC.
2	б) Доказати да је површина троугла $A'B'C'$ једнака четвртини површине троугла ABC тада и само тада, када се бар једна од тачака A', C' поклапа са средиштем одговарајуће странице.
5	**3.** 100 тегова од 1, 2, ... , 100 грама размештено је на два таса ваге, тако да је равнотежа. Доказати да је могуће скинути по два тега са сваког таса, тако да се равнотежа не наруши.
3	**4.** а) На сваком од поља крајње горње и крајње доње хоризонтале шаховске табле 8x8 стоји по фигура: доле - беле, горе - црне. У једном потезу је допуштено померити произвољну фигуру на суседно слободно поље по вертикали или хоризонтали. У ком најмањем броју потеза може да се добије то, да се црне фигуре нађу доле, а беле - горе?
4	б) Исто питање за таблу 7x7.
8	**5.** Неуморни Тома и Јеремија праве низ. На почетку у низу је један природан број. Затим они наизменично записују следеће бројеве: Тома добија следећи број додајући претходном његову произвољну цифру, а Јеремија - одузимајући од претходног његову произвољну цифру. Доказати да ће се неки број у том низу појавити не мање од 100 пута.
9	**6.** Унутар правоуглог листа папира изрезано је n правоугаоних рупа са страницама паралелним ивицама листа. На који најмањи број правоугаоних делова може гарантовано да се разреже тај избушени лист? (Показати да се у произвољном случају може разрезати на нађени број делова, а да се на мањи број делова у неким случајевима разрезати не може.)

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло, Основна варијанта, 31. октобар 1999.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

1. За које је n могуће распоредити целе бројеве од 1 до n
3 по кругу, тако да збир било која два суседна броја буде дељив бројем који следи за њима у смеру кретања казаљке на часовнику?

2. На правоугаоном листу папира је означено
2 а) неколико тачака једне праве;
3 б) три тачке.
Допушта се да се лист папира неколико пута пресавије дуж праве, тако да означене тачке не доспеју на линије пресавијања, и да се затим шилом пробуши испресавијани лист наскроз. Доказати да се може постићи да се рупе појаве у свим означеним тачкама и да се не добије ниједна сувишна рупа.

3. Неуморни Тома и Јеремија праве низ. На почетку у низу је
6 један природан број. Затим они наизменично записују следеће бројеве: Тома добија следећи број додајући претходном његову произвољну цифру, а Јеремија - одузимајући од претходног његову произвољну цифру. Доказати да ће се неки број у том низу појавити не мање од 100 пута.

4. Тачке K, L на страницама AC, CB троугла ABC су тачке у којима споља уписани кругови додирују странице. Доказати да права која повезује средишта KL и AB,
3 а) дели обим троугла пополa;
3 б) паралелна је бисектриси угла ACB.

5. а) 100 тегова од 1, 2, ... , 100 грама размештено је на
4 два таса ваге, тако да је равнотежа. Доказати да је могуће скинути по два тега са сваког таса, тако да се равнотежа не наруши.
б) Разматрајмо такве n, да се скуп тегова 1, 2, ... , n
4 грама може поделити на два дела једнака по тежини. Да ли је тачно, да се за произвољно такво n, веће од три, могу узети по два тега из сваког дела, тако да се једнакост тежина сачува?

6. На великој шаховској табли је означено $2n$ поља, тако да
8 топ може да се креће по свим означеним пољима, не прескачући неозначена. Доказати да се фигура од означених поља може разрезати на n правоугаоника.

7. Доказати да се код конвексног полиедра са $10n$ страна мо-
8 гу наћи n страна с једнаким бројем страница.