ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло. Припремна варијанта. 27. фебруар 2000.

8-9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
3	1. Може ли производ два узастопна природна броја бити једнак производу два суседна природна парна броја?
4	2. У трапезу $ABCD$, чија је површина 1, основице BC и AD се односе као 1:2. Нека је K средиште дијагонале AC. Права DK сече страницу AB у тачки L. Наћи површину четвороугла $BCKL$.
2	3. а) Доказати да се темена $3n$-тостране призме могу обојити са три боје, тако да свако теме буде повезано ивицама са теменима све три боје.
3	б) Доказати, да ако се темена n-тостране призме могу обојити са три боје, тако да свако теме буде повезано ивицама са теменима све три боје, онда је n дељиво са 3.
	(Напомена: основе n-тостране призме су подударни n-тоугаоници.)
5	4. Могу ли се природни бројеви распоредити у теменима коцке, тако да у сваком пару бројева који су повезани ивицом један од њих буде дељив другим, а да у осталим паровима то не важи?

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Припремна варијанта. 27. фебруар 2000.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 1. Конвексан четвороугао је разложен својим дијагоналама на четири троугла. Испоставило се да је сума површина два наспрамна троугла (оних који имају само заједничко теме) једнака суми површина друга два троугла. Доказати да једна од дијагонала полови другу.

4 2. На две наспрамне стране коцкице за игру нацртане су по једна тачка, на друге две наспрамне стране – по две тачке и на треће две наспрамне стране – по три тачке. Од осам таквих коцкица сложена је коцка 2×2×2 и избројан је укупан број тачака на свакој од њених шест страна. Да ли се тако могло добити 6 узастопних бројева?

4 3. Доказати неједнакост:

$$1^k+2^k+\ldots+n^k \le \frac{n^{2k}-(n-1)^k}{n^k-(n-1)^k},$$

за произвољна два природна броја n и k.

4. Да ли постоји бесконачан низ који се састоји од
3 а) реалних бројева,
3 б) целих бројева,
такав да је сума сваких десет узастопних бројева позитивна, а да је сума сваких првих узастопних $10n+1$ бројева негативна?

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта. 5. март 2000.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена)

поени	задаци
3	1. Наћи све реалне корене једначине $$(x+1)^{21}+(x+1)^{20}(x-1)+(x+1)^{19}(x-1)^2+\dots+(x-1)^{21}=0.$$
3	2. Дужине основица трапеза су цели бројеви. Доказати да се он може разложити на подударне троуглове.
6	3. Дата је кружница и тачка A унутар ње. Наћи геометријско место темена C свих могућих правоугаоника $ABCD$, где су B и D тачке кружнице.
7	4. Разбојници Дрпа и Окац деле гомилу од 100 новчића. Дрпа узима са гомиле прегршт новчића, а Окац, гледајући прегршт, одлучује коме ће од њих двојице она припасти. То се наставља док неки од њих не добије 9 прегршти, после чега други купи све преостале новчиће (деоба може да се заврши и тиме што су сви новчићи подељени, пре него што је неко добио 9 прегршти). Дрпа може да узме у прегршт колико год хоће новчића. Који највећи број новчића он може да обезбеди за себе, независно од деловања Окца? (Наведите тај број, покажите како Дрпа може да га обезбеди за себе и докажите да више од тога не може да обезбеди).
7	5. Који је највећи број коња који се може распоредити на шаховској табли 5×5, тако да сваки од њих туче тачно два друга? (Покажите распоред и докажите да је немогуће распоредити већи број коња тако да услов задатка буде испуњен.)
10	6. На кружном шаховском турниру сваки учесник игра са сваким један пут. За победу се добија један поен, за реми пола поена, а за пораз нула. Зваћемо партију неправилном ако је шахиста који је победио на крају сакупио мање поена од пораженог. Доказати да неправилне партије чине мање од 3/4 укупног броја партија на турниру.

ДВАДЕСЕТ ПРВИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта. 5. март 2000.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 **1.** Природни бројеви m и n су узајамно прости (немају заједнички делилац различит од јединице). Разломак

$$\frac{m+2000n}{n+2000m}$$

може да се скрати бројем d. Која је највећа могућа вредност d?

5 **2.** Тетиве AC и BD круга са центром у O секу се у тачки K. Нека су M и N центри кружница описаних око троуглова AKB и CKD. Доказати да је $OM=KN$.

5 **3.** У шпилу део карата лежи полеђином на доле. С времена на време Пера узима из шпила штос од једне или неколико узастопних карата, у коме горња и доња карта леже полеђином на доле, преврће цео штос као једну целину и ставља га на исто место у шпилу. Доказати да ће на крају крајева све карте лежати полеђином на горе независно од тога како Пера бира штосове.
(Примедба: ако се "штос" састоји само од једне карте, захтева се само да она лежи полеђином на доле.)

5 **4.** У равни, која је ишпартана мрежом вертикалних и хоризонталних правих на квадратна поља, нацртан је конвексан многоугао, тако да се његова темена налазе у теменима поља и ниједна његова страница није ни вертикална ни хоризонтална. Доказати да је сума дужина вертикалних одсечака мреже унутар многоугла једнака суми дужина хоризонталних одсечака мреже унутар многоугла.

7 **5.** Наћи максимални број N за који постоји N узастопних природних бројева, таквих да је сума цифара првог броја дељива са 1, сума цифара другог броја са 2, сума цифара трећег броја са 3, и т. д., сума цифара N-тог броја дељива са N.

6. На кружном шаховском турниру сваки учесник игра са сваким један пут. За победу се добија један поен, за реми пола поена, а за пораз нула. Зваћемо партију неправилном ако је шахиста који је победио на крају сакупио мање поена од пораженог.

6 а) Доказати да неправилне партије чине мање од 3/4 укупног броја партија на турниру.

6 б) Доказати да се у тачки а) број 3/4 не може заменити мањим.