18. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Београд, Југославија – 5. мај 2001.

1. Нека је n природан број. Ако су a и b природни бројеви већи од 1 такви да је $ab = 2^n - 1$, доказати да је број $ab - (a - b) - 1$ облика $k \cdot 2^{2m}$, где је k непаран природан, а m природан број. *(Кипар)*

2. Ако конвексан петоугао задовољава услове

(i) сви унутрашњи углови су подударни,

(ii) дужине свих страница су рационални бројеви,

доказати да је он правилан. *(Молдавија)*

3. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $a + b + c \geqslant abc$. Доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant abc\sqrt{3}$. *(Румунија)*

4. Коцка димензија $3\times3\times3$ је подељена на 27 подударних јединичних ћелија у облику коцке. Једна од добијених ћелија је празна, док се у свакој од преосталих налази јединична коцка означена једним од бројева $1, 2, \ldots, 26$ (сваки од ових бројева је додељен тачно једној коцки). Дозвољено је преместити јединичну коцку у суседну празну ћелију (две ћелије су суседне ако имају заједничку страну). Да ли се помоћу коначно много дозвољених потеза јединичне коцке могу распоредити тако да коцке означене бројевима k и $27 - k$ замене места, за свако $k \in \{1, 2, \ldots, 13\}$?

(Бугарска)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.