18. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Београд, СР Југославија – 5. мај 2001.

1. Нека је n природан број. Ако су a и b природни бројеви већи од 1 такви да је $ab = 2^n - 1$, доказати да је број $ab - (a - b) - 1$ облика $k \cdot 2^{2m}$, где је k непаран природан, а m природан број. *(Кипар)*

2. Ако конвексан петоугао задовољава услове

(i) сви унутрашњи углови су подударни,

(ii) дужине свих страница су рационални бројеви,

доказати да је он правилан. *(Молдавија)*

3. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $a + b + c \geqslant abc$. Доказати да је $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant abc\sqrt{3}$. *(Румунија)*

4. Коцка димензија $3 \times 3 \times 3$ је подељена на 27 подударних јединичних ћелија у облику коцке. Једна од добијених ћелија је празна, док се у свакој од преосталих налази јединична коцка означена једним од бројева $1, 2, \ldots, 26$ (сваки од ових бројева је додељен тачно једној коцки). Дозвољено је преместити јединичну коцку у суседну празну ћелију (две ћелије су суседне ако имају заједничку страну). Да ли се помоћу коначно много дозвољених потеза јединичне коцке могу распоредити тако да коцке означене бројевима k и $27 - k$ замене места, за свако $k \in \{1, 2, \ldots, 13\}$? *(Бугарска)*

Сваки задатак вреди 10 поена.
Време за рад: $4\frac{1}{2}$ сати.

РЕШЕЊА

1. Нека је $a=2^r a_1-1$ и $b=2^s b_1+1$, где су a_1 и b_1 непарни бројеви и $r,s\geqslant 1$. Тада је $2^n-1=2^{r+s}a_1b_1+2^r a_1-2^s b_1-1$, и одатле $2^r\mid 2^s b_1$ и $2^s\mid 2^r a_1$, што је могуће само ако $r=s$. Дакле, $ab-(a-b)-1=(a+1)(b-1)=2^{2r}a_1b_1$, при чему је a_1b_1 непарно.

2. Нека је $A_1A_2A_3A_4A_5$ дати петоугао и $A_iA_{i+1}=a_i$ $(A_6=A_1)$. Дужина пројекције петоугла на праву нормалну на A_1A_2 је једнака $a_2\sin 72^\circ+a_3\sin 36^\circ$ и такође је једнака $a_5\sin 72^\circ+a_4\sin 36^\circ$, па важи

$$(a_2-a_5)\sin 72^\circ+(a_3-a_4)\sin 36^\circ=0,\quad \text{тј.}\quad a_4-a_3=2(a_2-a_5)\cos 36^\circ.$$

Како је $\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt5}{4}$ ирационалан број, мора бити $a_3=a_4$. Слично је $a_4=a_5=a_1=a_2$, па је петоугао правилан.

Друго решење. Нека темену A_i у комплексној равни одговара комплексан број x_i. Можемо да сматрамо да је $x_2-x_1=a_1\in\mathbb{R}$. Тада је $x_{i+1}-x_i=a_iz^{i-1}$, где је $z=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$, па сабирањем добијамо $P(z)=a_1+a_2z+a_3z^2+a_4z^3+a_5z^4=0$. Међутим, већ знамо да је $\Phi_5(z)=1+z+z^2+z^3+z^4=0$ и да је полином $\Phi_5(x)$ нерастављив (нпр. по Ајзенштајновом критеријуму: $\Phi_5(x+1)=x^4+5x^3+10x^2+10x+5$). Дакле, минимални полином броја z је $\Phi_5(x)$. Следи да $\Phi_5(x)\mid P(x)$, па мора бити $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$.

3. На основу неједнакости између средина је $(a^2+b^2+c^2)^2\geqslant\frac19(a+b+c)^4\geqslant 3abc(a+b+c)\geqslant 3(abc)^2$, тј. $a^2+b^2+c^2\geqslant\sqrt3\cdot abc$.

4. Означимо сваку непразну ћелију бројем коцке која се у почетној позицији налази у њој, а празну ћелију бројем 0. Тако позицију у сваком кораку можемо описати неком пермутацијом σ скупа $\{0,1,\dots,26\}$, при чему почетној позицији одговара идентичка пермутација $\sigma\binom{0\ 1\ 2\ \cdots\ 25\ 26}{0\ 1\ 2\ \cdots\ 25\ 26}$. У сваком потезу врши се транспозиција $(0,x)$ за неко $x\neq 0$ - тј. елементи 0 и x мењају места. Свака транспозиција мења парност пермутације (тј. парност броја парова (i,j) са $i<j$ и $\sigma(i)>\sigma(j)$). Како је коначна пермутација $\sigma\binom{0\ 1\ 2\ \cdots\ 25\ 26}{0\ 26\ 25\ \cdots\ 2\ 1}$ непарна (као производ 13 транспозиција $(i,26-i)$), потребан је непаран број потеза.

С друге стране, ако обојимо ћелије наизменично црно и бело, попут шаховске табле, видимо да се боја празне ћелије у сваком потезу мења. Тако она после непарног броја потеза не може бити у истој боји, а самим тим ни на истом месту као у почетној позицији, чиме смо дошли до контрадикције.