Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Први разред – А категорија

1. Нека су $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ дати реални бројеви. Наћи све реалне бројеве x за које је израз $|x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_n|$ најмањи.

2. Наћи све тројке међусобно различитих декадних цифара $a, b, c > 0$ тако да разломци $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$ и $\frac{a}{c}$ имају исту вредност.

3. У трапезу $ABCD$ збир углова на основици AB је 90°. Доказати да је дуж која спаја средишта основица тог трапеза једнака полуразлици основица.

4. У одељењу је 30 ученика. Сваког дана троје њих имају обавезу дежурства у школској кухињи. Доказати да није могуће тако направити распоред дежурстава да сваки пар ученика тачно једном буде заједно на дежурству.

5. Да ли је могуће, користећи само слова А и Б, направити скуп са 3 речи од по 4 слова, 10 речи од по 5 слова, 30 речи од по 6 слова и 5 речи од по 7 слова, уз услов да почетак ниједне речи из скупа не сме и сам да буде реч из скупа?

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Други разред – А категорија

1. Ако су са t_a, t_b и t_c означене дужине тежишних дужи које одговарају страницама a, b, c датог троугла и ако је $t = \frac{t_a+t_b+t_c}{2}$, доказати да се површина S овог троугла може израчунати формулом

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{t(t-t_a)(t-t_b)(t-t_c)}.$$

2. Ако су a, b, c странице троугла и s његов полуобим, доказати неједнакост

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geqslant 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

3. Доказати да је $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ = 4$.

4. Наћи она решења система једначина

$$\begin{aligned} y+2 &= (3-x)^2 \\ (2z-y)(y+2) &= 9+4y \\ x^2+z^2 &= 4x \end{aligned}$$

која задовољавају услов $z \geqslant 0$.

5. Доказати да је $\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ ирационалан број.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Трећи разред – А категорија

1. За какве реалне бројеве p систем једначина

$$\begin{aligned} 2x - \log_2(1+y^2) &= p \\ -x + \cos y &= 19 - p^2 \end{aligned}$$

има тачно једно решење?

2. Нека је $z_k = \cos\frac{2k\pi}{p} + i\sin\frac{2k\pi}{p}$ за $k = 0, 1, \ldots, p-1$, где је p прост број. За ма који природан број n, израчунати $z_0^n + z_1^n + \cdots + z_{p-1}^n$.

3. Дата је основа куће која се састоји од квадрата странице 8 и квадрата странице 4, тако да кућа има шест спољних зидова дужина 12, 8, 8, 4, 4 и 4. Од нивоа олука, кров се над сваким зидом уздиже под једнаким углом 45°. Гледано са било које тачке крова, кров се спушта према најближем зиду; кров се дели у тачкама подједнако удаљеним од више зидова. Нацртати површ крова, а затим израчунати запремину испод крова.

4. Дата су два круга k_1 и k_2 који се додирују споља у тачки A. Нека су B и C промењиве тачке на k_1 и k_2 такве да је $\sphericalangle BAC = \pi/2$ и нека је D подножје нормале из A на BC. Наћи геометријско место тачака D.

5. Израчунати вредност детерминанте реда n:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & x & y & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & y \\ y & 0 & 0 & \ldots & x \end{vmatrix}$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати једнакост:

$$n! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n.$$

2. На кружници је распоређено неколико реалних бројева. Ако су a, b, c, d четири броја која тим редом стоје један за другим на кружници и ако је $(a-d)(b-c) > 0$, дозвољено је заменити b и c. Доказати да после неколико корака неће бити могуће извести ниједну такву замену.

3. Наћи најмањи природан број n такав да се број $7777n$ у декадном запису записује само јединицама.

4. Нека је p полином са целобројним коефицијентима такав да је $p(5) = -8$, $p(7) = -2$ и $p(12) = 13$. Доказати да он не може имати целобројних нула.

5. Нека су $r_1, r_2, \ldots, r_m$ рационални бројеви из интервала $(0, 1)$ чији је збир 1. За сваки природан број n нека је $f(n) = n - \sum_{k=1}^{m} [r_k n]$. Одредити највећу и најмању вредност коју може узети $f(n)$ за природне бројеве n.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Први разред – Б категорија

1. Колико има природних бројева мањих од 1000 који нису дељиви ни са 2, ни са 3, ни са 5?

2. Доказати да једначина $x^2-10y^2-2x-10y-2=0$ нема целобројних решења.

3. У равни је дато 17 правих, од којих је 6 међусобно паралелно, а од осталих 11 никоје две нису паралелне, нити су паралелне са првих 6 правих. Одредити број троуглова чије странице леже на датим правим.

4. Доказати да број $\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{8}$ није рационалан.

5. Колико има пресликавања F из скупа $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ у скуп $B=\{1,2,3,4,5,6\}$ са особинама $F(a)\geqslant 4$, $F(c)\leqslant 4$ и $F(e)=4$? Колико је међу њима 1-1 пресликавања?

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Други разред – Б категорија

1. Права p је спољна заједничка тангента кругова k_1 и k_2 који се споља додирују. Круг k споља додирује оба та круга и праву p. Ако су r_1, r_2 и r полупречници кругова k_1, k_2 и k редом, доказати једнакост

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}\,.$$

2. Решити неједначину

$$\frac{x^2 + x + 2 - |3x+1|}{x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1} > 0.$$

3. Странице правоугаоника $ABCD$ су $AB = 12$ и $BC = 10$. Тачка A спојена је са средиштем E странице BC и из тачке D повучена је нормала DM на дуж AE (M је подножје нормале). Израчунати дужину дужи DM.

4. Ако су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$, где је $p \neq 0$ реалан број, доказати да важи $x_1^4 + x_2^4 \geqslant 2 + \sqrt{2}$.

5. Нека је z комплексан број различит од 1 и -1. Доказати да је број $\frac{z-1}{z+1}$ чисто имагинаран ако и само ако је $|z| = 1$.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити неједначину

$$\sin^2 x_1 + \cdots + \sin^2 x_{1000} + \frac{1}{\sin^2 x_1} + \cdots + \frac{1}{\sin^2 x_{1000}} \leqslant 2000.$$

2. У зарубљену купу је могуће уписати сферу. Притом је полупречник описане сфере око зарубљене купе $\sqrt{30}$ пута већи од полупречника уписане сфере. Одредити угао који заклапа изводница купе са равни основе.

3. Доказати да је $\cos 24° + \cos 48° - \cos 84° - \cos 12° = \frac{1}{2}$.

4. Нека је a_0 произвољан цео број и $a_{n+1} = 4 + a_0 a_1 \cdots a_n$ $(n \geqslant 0)$. Доказати да су сви бројеви a_n $(n \geqslant 2)$ потпуни квадрати.

5. На тежишној дужи AA_1 троугла ABC наћи тачку M тако да збир $AM^2 + BM^2 + CM^2$ буде минималан.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

03.02.2001.

Четврти разред – Б категорија

1. Дата је функција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & x \leqslant 2, \\ -x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

Доказати да постоји њена инверзна функција и израчунати $f^{-1}(x)$.

2. Доказати да је $\operatorname{tg} 10^\circ$ ирационалан број.

3. У низу $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 11, \ldots$ разлике узастопних бројева чине аритметичку прогресију. Израчунати a_{2001}.

4. Дат је комад папира квадратног облика странице n. Колико је најмање савијања (паралелно страницама комада) потребно да би се добио комад квадратног облика странице 1?

5. Доказати да је претпоследња цифра броја 3^n у декадном запису парна (n је природан број).

Време за рад 180 минута.