САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Крагујевац, 21. април 2001.

Први разред

1. Нека су $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ конвексни четвороуглови у равни такви да је $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$ и $DA = D_1A_1$. Ако су дијагонале AC и BD међусобно нормалне, доказати да су то и дијагонале A_1C_1 и B_1D_1.

2. Дато је 5 дужи, тако да од сваке три може да се састави троугао. Доказати да су неке три од њих странице оштроуглог троугла.

3. Нека су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ $(n \geq 3)$ првих n простих бројева. Доказати да је

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \cdots + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_n} < \frac{1}{2}.$$

4. На гомили се налази n новчића. Два играча играју игру у којој наизменично повлаче потезе. Потез се састоји од узимања 5, 7 или 11 новчића са гомиле. Губи играч који не може да одигра потез. Који играч, први или други, има победничку стратегију ако:

(а) $n = 2001$;

(б) $n = 5000$?

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Крагујевац, 21. април 2001.

Други разред

1. Нека је $S = \{x^2 + 2y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Ако је a цео број са својством да $3a$ лежи у S, доказати да и a лежи у S.

2. Темена квадрата $ABCD$ странице $25/4$ леже на сфери. Паралелне праве кроз тачке A, B, C и D поново секу сферу у тачкама A_1, B_1, C_1 и D_1, редом. Ако је $AA_1 = 2$, $BB_1 = 10$, $CC_1 = 6$, одредити дужину дужи DD_1.

3. Наћи све природне бројеве n за које постоји бојење свих тачака у простору тако да је сваки од следећих услова задовољен:

(i) свака тачка је обојена тачно једном бојом;

(ii) коришћено је тачно n боја;

(iii) свака права је обојена у највише две боје.

4. Нека је S скуп свих n-торки $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ реалних бројева са ствојством да је најмањи од бројева $x_1, \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ једнак 0, а највећи једнак 1. Одредити

$$\max_{(x_1,\ldots,x_n)\in S} \max_{1\le i,j\le n} (x_i - x_j) \quad \text{и} \quad \min_{(x_1,\ldots,x_n)\in S} \max_{1\le i,j\le n} (x_i - x_j).$$

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Крагујевац, 21. април 2001.

Трећи и четврти разред

1. Решити једначину $x^y + y = y^x + x$ у скупу природних бројева.

2. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{2001}$ позитивни бројеви такви да је

$$x_i^2 \geq x_1^2 + \frac{x_2^2}{2^3} + \frac{x_3^2}{3^3} + \cdots + \frac{x_{i-1}^2}{(i-1)^3} \quad \text{за } 2 \leqslant i \leqslant 2001.$$

Доказати да је $\displaystyle\sum_{i=2}^{2001} \frac{x_i}{x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1}} > 1.999.$

3. Нека је k природан број и нека је N_k број низова дужине 2001 чији су сви чланови у скупу $\{0, 1, 2, \ldots, 2k+1\}$ и међу којима има непаран број нула. Одредити највећи степен двојке који дели N_k.

4. Основа пирамиде $SABCD$ је паралелограм $ABCD$. Равни одређене троугловима ASC и BSD су међусобно нормалне. Наћи површину стране ASD, ако су површине страна ASB, BSC и CSD једнаке x, y и z, редом.

Време за рад 4 сата.
Сваки задатак вреди 25 поена.