ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Припремна варијанта, 25. фебруар 2001.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
3	**1.** Природни број n је дозвољено заменити бројем ab, ако су a и b природни бројеви који задовољавају услов $a+b=n$. Може ли се помоћу таквих замена од броја 22 добити број 2001?
4	**2.** Једна средња линија троугла је већа од једне од његових медијана. Доказати да је тај троугао тупоугли.
4	**3.** У продавницу су довезли 20 kg сира и направио се ред за њега. Пошто прода сир купцу који је на реду, продавачица тачно израчуна средњу тежину куповине продатог сира и саопштава за колико људи има довољно преосталог сира, ако сви буду куповали ту средњу тежину. Да ли је продавачица могла да после сваког од првих 10 купаца саопшти да је преосталог сира довољно за тачно 10 људи? Ако је могла, колико је сира остало у продавници после првих 10 купаца? (Средња тежина куповине - то је укупна тежина продатог сира подељена бројем оних који су тај сир купили.)
2	**4.** а) На столу лежи пет једнаких папирних троуглова. Дозвољено је сваког од њих транслирати у произвољном смеру. Да ли је тачно да се увек било који од тих троуглова може покрити са четири преостала?
3	б) На столу леже пет једнаких једнакостраничних папирних троуглова. Дозвољено је сваког од њих транслирати у произвољном смеру. Доказати да се било који од тих троуглова може покрити са четири преостала.
5	**5.** На табли димензија 15×15 распоређено је 15 топова, тако да не туку један другога. Потом је сваки топ премештен скоком коња. Доказати да ће сада нека два топа да туку један другога.

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Припремна варијанта, 25. фебруар 2001.
10-11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени	задаци
3	**1.** Аутобус, који се креће путем дужине 100 km, опремљен је компјутером који показује прогнозу времена које преостаје до доласка на одредиште. То време се рачуна на основу претпоставке да ће средња брзина аутобуса на преосталом делу пута бити иста као и на већ пређеном делу. После 40 минута од поласка, очекивано време до доласка било је 1 час, и такво је остало у току наредних 5 часова. Да ли је то могуће? Ако јесте, колико је километара прешао аутобус на крају тих 5 часова? (Средња брзина аутобуса на делу пута - то је дужина тог дела пута подељена временом за које је он пређен.)
4	**2.** Декадни запис природног броја a се састоји од n цифара, а декадни запис броја a^3 (а на куб) се састоји од m цифара. Може ли $n+m$ бити једнако 2001?
4	**3.** У троуглу ABC тачка X лежи на страници AB, а тачка Y на страници BC. Дужи AY и CX се секу у тачки Z. Познато је да је $AY=YC$ и $AB=ZC$. Доказати да тачке B, X, Z и Y леже на једној кружници.
5	**4.** Двоје играју на табли 3×100 поља: наизменично стављају на слободна поља домине 1×2. Први играч ставља домине усмерене дуж табле, а други у попречном смеру. Губи онај који не може да одигра потез. Који играч може да обезбеди себи победу (ма како играо противник), и како треба да игра?
5	**5.** На површи правилног тетраедра ивице 1 cm одабрано је 9 тачака. Доказати да се међу тим тачкама могу наћи две, чије међусобно растојање (у простору) није веће од 0,5 cm.

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта, 4. март 2001.
8-9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

3 1. У некој земљи има 10 процената радника чија зарада представља 90 процената свих зарада која се исплаћују у тој земљи. Може ли бити да у сваком региону, на које је подељена та земља, зарада било којих 10 процената радника није већа од 11 процената свих зарада које се исплаћују у том региону?

5 2. Дате су три гомиле камена: на првој има 51 камен, на другој 49, а на трећој 5. Дозвољено је да се две гомиле обједине у једну, а такође и да се гомила, која се састоји од парног броја каменова, подели на две једнаке. Може ли се добити 105 гомила са по једним каменом у свакој?

5 3. Унутар угла са теменом M уочена је тачка A. Из те тачке је избачена лопта, која се одбила од једног храка угла у тачки B, затим од другог крака у тачки C и вратила се у тачку A ("упадни" угао је једнак "одбојном" углу). Доказати да центар O кружнице описане око троугла BCM лежи на правој AM. (Сматра се да је лопта тачка.)

5 4. На табли је нацртан конвексни многоугао. У њему је конструисано неколико дијагонала, које се не секу унутар њега, тако да је он разложен на троуглове. Затим је поред сваког темена записан број троуглова који се сустичу у том темену, после чега су све дијагонале избрисане. Могу ли се помоћу бројева који су остали поред темена реконструисати избрисане дијагонале?

3 5. а) На два поља шаховске табле постављене су црна и бела фигура. Дозвољено их је наизменично померати, у сваком потезу фигуру која је на реду, на било које слободно суседно поље по вертикали или хоризонтали. Могу ли се као резултат таквих померања на табли појавити све могуће позиције тих двеју фигура, при том свака тачно по један пут?

4 б) А ако је дозвољено померати фигуре произвољним редом (не обавезно наизменично)?

7 6. Нека су AH_a, BH_b и CH_c висине троугла ABC. Показати да је троугао чија су темена ортоцентри троуглова AH_bH_c, BH_aH_c и CH_aH_b подударан троуглу $H_aH_bH_c$.

7. Аца је замислио двоцифрен број (од 10 до 99). Глиша покушава да га открије бирајући двоцифрене бројеве. Ако Глиша одабере тачан број, или ако тачно одабере једну цифру а другу погреши за један, Аца одговара "вруће"; у осталим случајевима Аца одговара "хладно". (На пример, ако је замишљени број 65, кад изабере 65, 64, 66, 55 или 75, Глиша ће чути одговор "вруће", а у осталим случајевима ће чути "хладно").

2 а) Показати да не постоји начин, на који Глиша гарантовано може да сазна замишљени број, из 18 покушаја.

3 б) Наћи начин на који Глиша гарантовано може да сазна замишљени број, из 24 покушаја.

3 в) А шта се добија са 22 покушаја?

ДВАДЕСЕТ ДРУГИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта, 4. март 2001.
10–11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
3	**1.** Наћи бар један полином $P(x)$ степена 2001, такав да је за свако x задовољена једнакост $P(x)+P(1-x)=1$.
5	**2.** Приликом прављења извештаја о школској години испоставило се да свакој групи са не мање од 5 ученика 80 процената двојки, које су добили ти ученици током године, има не више од 20 процената ученика из те групе. Доказати да је бар три четвртине свих двојки добио један ученик.
5	**3.** Нека су AH_a, BH_b и CH_c висине троугла ABC. Доказати да је троугао чија су темена ортоцентри троуглова AH_bH_c, BH_aH_c и CH_aH_b подударан троуглу $H_aH_bH_c$.
5	**4.** Дате су две таблице A и B, свака са по m врста и n колона. У сваком пољу сваке од таблица уписан је један од бројева 0 или 1, при чему у врстама таблица бројеви не опадају (при кретању слева надесно) и у колонама таблица бројеви не опадају (при кретању одозго наниже). Познато је да за свако k од 1 до m збир бројева у горњих k врста таблице A није мањи од збира бројева у горњих k врста таблице B. Познато је такође да у таблици A има исто толико јединица, колико и у таблици B. Доказати да за свако l од 1 до n збир бројева у левих l колона таблице A није већи од збира бројева у левих l колона таблице B.
	5. Учесници шаховског турнира су одиграли сваки са сваким по једну партију. За сваког учесника је срачунат број поена које је он добио (за победу 1 поен, за реми 1/2 поена, за пораз 0 поена).
4	а) Може ли за сваког учесника збир поена оних које је он победио бити већи од збира поена оних од којих је он изгубио?
4	б) Може ли за сваког учесника збир поена оних које је он победио бити мањи од збира поена оних од којих је он изгубио?
8	**6.** Доказати да постоје 2001 конвексних полиедара у простору, таквих да никоја три од њих немају заједничких тачака, а да било која два додирују један другог (то јест имају бар једну заједничку граничну тачку, но немају заједничких унутрашњих тачака).
	7. По кругу је распоређено неколико корпица. У свакој од њих може да буде једна или неколико куглица (или она може бити празна). Корак се састоји у томе што се из неке корпице узимају све куглице и размештају по једна, идући у смеру кретања казаљке на часовнику, почевши од наредне корпице.
4	а) Нека се у сваком наредном кораку дозвољава узимање куглица из оне корпице у коју је стављена последња куглица у претходном кораку. Доказати да ће се у неком моменту поновити почетни распоред куглица.
4	б) Нека је у једном кораку дозвољено узети куглице из произвољне корпице. Да ли је тачно да се после неколико корака од произвољног почетног распореда куглица по корпицама може добити било који други распоред?