19. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Анталија, Турска – 27. април 2002.

1. Неки парови скупа од n тачака $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n \geqslant 4$) су међусобно повезани дужима, тако да је свака тачка повезана са бар још три уочене тачке.

Доказати да постоје различите тачке $X_1, X_2, \ldots, X_{2k} \in \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ за неко $k \geqslant 2$, тако да су тачке X_i и X_{i+1} повезане за свако i ($1 \leqslant i \leqslant 2k$), где је $X_{2k+1} \equiv X_1$. *(Југославија)*

2. Низ $(a_n)_{n\geqslant 1}$ је дефинисан са

$$a_1 = 20, \quad a_2 = 30, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad \text{за } n \geqslant 1.$$

Одредити све природне n за које је $1+5a_n a_{n+1}$ потпун квадрат. *(Бугарска)*

3. Кружнице C_1 и C_2 различитих полупречника се секу у тачкама A и B. Нека су заједничке тангенте ових кружница MN и ST ($M, S \in C_1, N, T \in C_2$). Доказати да ортоцентри троуглова AMN, AST, BMN и BST чине темена правоугаоника. *(Румунија)*

4. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, такве да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$2n + 1 \leqslant f(f(n)) + f(n) \leqslant 2n + 2002.$$

(Румунија)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.