

19. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Анталија, Турска – 27. април 2002.

1. Неки парови скупа од n тачака A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 4$) су међусобно повезани дужима, тако да је свака тачка повезана са бар још три уочене тачке.
Доказати да постоје различите тачке $X_1, X_2, \dots, X_{2k} \in \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ за неко $k \geq 2$, тако да су тачке X_i и X_{i+1} повезане за свако i ($1 \leq i \leq 2k$), где је $X_{2k+1} \equiv X_1$.
(Југославија)
2. Низ $(a_n)_{n \geq 1}$ је дефинисан са
$$a_1 = 20, \quad a_2 = 30, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad \text{за } n \geq 1.$$
Одредити све природне n за које је $1 + 5a_n a_{n+1}$ потпун квадрат. (Бугарска)
3. Кружнице C_1 и C_2 различитих полупречника се секу у тачкама A и B . Нека су заједничке тангенте ових кружница MN и ST ($M, S \in C_1, N, T \in C_2$). Доказати да ортоцентри троуглова AMN , AST , BMN и BST чине темена правоугаоника.
(Румунија)
4. Одредити све функције $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такве да за свако $n \in \mathbb{N}$ важи
$$2n + 1 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2002.$$
 (Румунија)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.