

МАЛА ОЛИМПИЈАДА

Бечићи, 21.04.2002.

1. Човек се налази у тачки $(1, 1)$ у координатној равни и жели да нађе предмет који се налази у некој од тачака (a, b) , при чему је $a \in \{1, 2, \dots, m\}$, $b \in \{1, 2, \dots, n\}$ и након тога се врати у тачку из које је кренуо. Колико му је потребно времена да уради тражени посао, ако не зна у којој од датих тачака се налази предмет и може да се креће у произвољном правцу брзином не већом од 1.
2. Нека је s полуобим троугла ABC . Нека су E и F тачке на правој AB , такве да је $CE = CF = s$. Доказати да се описана кружница троугла EFC и кружница која додирује страну AB и продужетке страна AC и BC троугла ABC додирују.
3. Нека је низ $(x_n)_{n \geq 1}$ дефинисан са $x_2 = 1, x_3 = 1$ и

$$(n+1)(n-2)x_{n+1} = n(n^2 - n - 1)x_n - (n-1)^3x_{n-1} \text{ за } n \geq 3.$$

Доказати да је x_n цео број ако и само ако је n прост број.

ДОДАТНО ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА ЕКИПУ ЗА ИМО

Београд, ???.???.2002.

1. Наћи највећу вредност израза $a + b + c + abc$, где су a, b и c ненегативни бројеви за које важи $a^2 + b^2 + c^2 + abc \leq 4$.
2. Нека је $ABCD$ конвексни четвороугао код кога је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD$. Нека су O и H , редом, центар описане кружнице и ортоцентар троугла ABC . Доказати да су тачке O, H и D колинеарне.
3. За свако природно n , нека је $f(n)$ број различитих могућих избора знака $+$ и $-$ за које важи $\pm 1 \pm 2 \pm \dots \pm n = 0$. Доказати да је:
 - (а) $f(n) = 0$ за $n \equiv 1, 2 \pmod{4}$;
 - (б) $f(n) \geq 2^{\frac{n}{2} - 1}$ за $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$.