Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Први разред – А категорија

1. Ако је n природан број, доказати да је $(n+1)^{3n} - n^{2n}(n+3)^n$ дељиво са $3n+1$.

2. Доказати да је број $\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$ ирационалан за сваки природан број $n \geqslant 2$.

3. У петоуглу $ABCDE$ све странице су међусобно подударне и $\sphericalangle BAE = 2\sphericalangle CAD$. Израчунати $\sphericalangle BAE$.

4. Над страницама конвексног четвороугла као над пречницима конструисана су четири круга. Доказати да ти кругови прекривају четвороугао.

5. На одбојкашком турниру учествовало је 10 екипа. Свака од њих је одиграла по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. На крају турнира прва екипа је имала x_1 победа и y_1 пораза, друга x_2 победа и y_2 пораза, ..., десета је имала x_{10} победа и y_{10} пораза. Доказати да је

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2.$$

(У одбојци нема нерешеног резултата - свака утакмица се завршава победом једне од екипа.)

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Други разред – А категорија

1. У оштроуглом троуглу ABC, B' и C' су подножја висина из темена B и C редом. Кружница са пречником AB сече праву CC' у тачкама M и N, а кружница са пречником AC сече праву BB' у P и Q. Доказати да је четвороугао $MPNQ$ тетиван.

2. Нека су α и β два угла неког троугла. Доказати неједнакост

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta} \geqslant \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\,.$$

3. Дат је квадар са ивицама x, y, z, $x<y<z$. Нека је p збир дужина свих његових ивица, S његова површина, и d дужина дијагонале квадра. Доказати да важи

$$x < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right) \quad \text{и} \quad z > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right).$$

4. Дужине страница троугла су природни бројеви, а полупречник описаног круга једнак је $6,25$. Одредити странице тог троугла.

5. На шаховском турниру учествовало је 8 такмичара. Сваки од њих је одиграо по једну партију са сваким од преосталих учесника. На крају турнира сви шахисти су имали различит број поена, а другопласирани је освојио онолико поена колико четворица последњих заједно. Како се завршила партија између играча који су заузели четврто и шесто место? (У шаху, за победу играч добија 1 поен, за пораз 0, а у случају ремија оба играча добијају по 1/2 поена.)

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Трећи разред – А категорија

1. У оштроуглом неједнакокраком троуглу ABC уочена је тачка T из које се свака страница тог троугла види под углом од $120°$ (*Торичелијева тачка троугла*). Нека су A_1, B_1 и C_1 подножја нормала из тачке T на странице троугла, и k кружница описана око $\triangle A_1B_1C_1$. Ако су A_2, B_2 и C_2 пресечне тачке кружнице k са страницама троугла ABC различите од тачака A_1, B_1, C_1, доказати да је $\triangle A_2B_2C_2$ једнакостраничан.

2. Одредити све парове (m, n) целих бројева тако да важи једнакост

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n.$$

3. Нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарни вектори у $\mathbb{R}^3$, и α, β, γ реални бројеви. Доказати да су вектори

$$\beta\vec{c} - \gamma\vec{b}, \quad \gamma\vec{a} - \alpha\vec{c}, \quad \alpha\vec{b} - \beta\vec{a}$$

компланарни.

4. Одредити све просте бројеве $p_1, p_2, \ldots, p_8$ за које важи

$$p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_8^2 + 992 = 4p_1p_2\cdots p_8.$$

5. Дат је полином $P(x)$ чији је слободни члан различит од нуле. Ако за сваки реалан број x важи

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x),$$

доказати да $P(x)$ нема ниједну нулу у скупу реалних бројева.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Четврти разред – А категорија

1. У оштроуглом неједнакокраком троуглу ABC уочена је тачка T из које се свака страница тог троугла види под углом од $120°$ (*Торичелијева тачка троугла*). Нека су A_1, B_1 и C_1 подножја нормала из тачке T на странице троугла, и k кружница описана око $\triangle A_1B_1C_1$. Ако су A_2, B_2 и C_2 пресечне тачке кружнице k са страницама троугла ABC различите од тачака A_1, B_1, C_1, доказати да је $\triangle A_2B_2C_2$ једнакостраничан.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају једнакост

$$2f(2x) = f(x) + x \quad \text{за свако } x \in \mathbb{R}$$

и непрекидне су у тачки $x = 0$.

3. Одредити све природне бројеве $n > 1$ који имају следеће својство: за сваке две пермутације $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ скупа $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ постоје различити бројеви $i, j \in A$ такви да $n \mid (a_i + b_i) - (a_j + b_j)$.

4. Човек се налази у чамцу на левој обали канала широког $3\,km$. Жели да стигне до куће на десној обали канала која је од њега удаљена $5\,km$ ваздушном линијом. Он ће довеслати до неког места на другој обали брзином од $6\,km/h$, а затим наставити до куће трчећи брзином од $8\,km/h$. Одредити растојање куће и места до ког треба човек да довесла да би стигао кући за најкраће могуће време. (Претпоставља се да вода у каналу мирује.)

5. Нека је P полином са целобројним коефицијентима и $n \geqslant 3$ природан број. Доказати да не постоје различити цели бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тако да важи

$$P(x_1) = x_2, \quad P(x_2) = x_3, \quad \ldots, \quad P(x_{n-1}) = x_n, \quad P(x_n) = x_1.$$

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Први разред – Б категорија

1. Одредити све природне бројеве n за које је број

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$$

дељив са 18.

2. Познато је да је

$$28! = 30488a34461171386050150 4b00000.$$

Одредити цифре a и b.

3. У троуглу ABC код кога је $\sphericalangle BCA \neq 90^\circ$, A', B' су подножја висина из тачака A, B редом, а O је центар описаног круга. Одредити угао под којим се секу праве $A'B'$ и OC.

4. Четвороугао $ABCD$ је конвексан и тангентан. Ако је O центар круга уписаног у тај четвороугао, одредити збир $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD$.

5. На одбојкашком турниру учествовало је 10 екипа. Свака од њих је одиграла по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. На крају турнира прва екипа је имала x_1 победа и y_1 пораза, друга x_2 победа и y_2 пораза, ..., десета је имала x_{10} победа и y_{10} пораза. Доказати да је

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2.$$

(У одбојци нема нерешеног резултата - свака утакмица се завршава победом једне од екипа.)

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Други разред – Б категорија

1. Одредити све вредности d за које постоје узајамно прости природни бројеви a и b тако да је d једнак највећем заједничком делиоцу бројева $a+b$ и a^2+b^2.

2. Дат је троугао ABC код кога је $|AB| = c$, $|AC| = b$, $\sphericalangle CAB = 60°$. У тај троугао је уписан паралелограм $AMNP$ такав да темена M, N, P припадају страницама AB, BC, AC редом. Наћи максималну могућу површину таквог паралелограма.

3. Решити једначину

$$\sqrt[5]{x+27} + \sqrt[5]{6-x} = 3$$

у скупу реалних бројева.

4. Над страницама конвексног четвороугла као над пречницима конструисана су четири круга. Доказати да ти кругови прекривају четвороугао.

5. Доказати да број

$$5^{2n} \cdot 7^{2n+1} \cdot 11^{2n} + 25^n \cdot 7^{2n} \cdot 11^{2n+1} - 5^{2n+1} \cdot 49^n \cdot 121^n$$

није потпун квадрат ни за један природан број n.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Трећи разред – Б категорија

1. У равни су дати кругови $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ тако да сваки од њих споља додирује преостала два. Израчунати полупречник круга описаног око троугла $O_1O_2O_3$.

2. Решити једначину
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \sin x + \cos x.$$

3. Нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некомпланарни вектори у $\mathbb{R}^3$, и α, β, γ реални бројеви. Доказати да су вектори
$$\beta\vec{c} - \gamma\vec{b}, \quad \gamma\vec{a} - \alpha\vec{c}, \quad \alpha\vec{b} - \beta\vec{a}$$
компланарни.

4. Решити неједначину
$$4^{x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-4}} + 2^{2x-6+2\sqrt{x^2-4}} \geqslant 3^{x-3+\sqrt{x^2-4}} + 3^{x-2+\sqrt{x^2-4}}.$$

5. Дат је правоугли троугао са катетама a и b за које важи
$$a > b \quad \text{и} \quad \log\frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(\log a + \log b - \log 2).$$
Израчунати оштре углове тог троугла.

Време за рад 180 минута.

Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Четврти разред – Б категорија

1. У равни су дати кругови $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ тако да сваки од њих споља додирује преостала два. Израчунати полупречник круга описаног око троугла $O_1O_2O_3$.

2. Дати су реални бројеви m и n, $mn < 0$, $m + n \neq 0$ и функције

$$y = m \cdot 3^x + n \quad \text{и} \quad y = n \cdot 3^{-x} + m.$$

Доказати да се графици ових двеју функција секу у двема тачкама, од којих је једна на апсцисној, а друга на ординатној оси.

3. Дати су реални бројеви a, b, c, d, $a \neq 0$, и једначина $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Ако је λi ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$) решење те једначине, доказати да је $ad = bc$ и $ac > 0$.
(i је имагинарна јединица: $i^2 = -1$.)

4. Човек се налази у чамцу на левој обали канала широког $3\,km$. Жели да стигне до куће на десној обали канала која је од њега удаљена $5\,km$ ваздушном линијом. Он ће довеслати до неког места на другој обали брзином од $6\,km/h$, а затим наставити до куће трчећи брзином од $8\,km/h$. Одредити растојање куће и места до ког треба човек да довесла да би стигао кући за најкраће могуће време. (Претпоставља се да вода у каналу мирује.)

5. Дат је број $z \in \mathbb{C}$. Ако је $|z| = 1$ и $z \neq 1$, доказати да је

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0.$$

Време за рад 180 минута.