Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Први разред – А категорија

1. Дат је полином $p(x)$ са целобројним коефицијентима. При дељењу полиномом $x^2 - 12x + 11$, $p(x)$ даје остатак $990x - 889$. Доказати да $p(x)$ нема ниједну нулу у скупу целих бројева.

2. Дат је троугао ABC и тачке M, N, P на његовим страницама AB, BC, AC редом, такве да је четвороугао $AMNP$ паралелограм. Посматрајмо кругове описане око троуглова MBN и NCP. Нека су t_1 и t_2 њихове тангенте у тачкама M и P редом. Доказати да је $t_1 \parallel t_2$.

3. Дати су реални бројеви a, b, c, d за које важи

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \quad ab + cd > 0, \quad ac + bd > 0.$$

Доказати да је $ad + bc > 0$.

4. Дат је троугао ABC. Посматрајмо праве које секу странице AC и BC у тачкама M и N редом тако да је $MN = AM + BN$. Доказати да постоји круг k који додирује све такве праве.

5. Нека је $S(n)$ збир, а $P(n)$ производ цифара природног броја n. Наћи све природне бројеве за које је $S(n) + P(n) = n$.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Други разред – А категорија

1. Наћи све вредности реалног параметра a тако да систем

$$\begin{aligned} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0 \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

2. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$. Ако је $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 10$, $DE = 7$ и $AE = 9$, доказати да се у тај петоугао не може уписати круг.

3. У скупу целих бројева решити систем

$$\begin{aligned} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \end{aligned}$$

4. Нека је $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ низ цифара за које важи: ако је $a_n = 1$, онда $a_{n+1} \neq 2$, и ако $a_n = 3$, онда $a_{n+1} \neq 4$. Доказати да постоје $k, l \in \{1, 2, \ldots, 98\}$, $k \neq l$, такви да је $a_k = a_l$ и $a_{k+1} = a_{l+1}$.

5. Дат је троугао ABC. На правим AC, AB, BC дате су тачке A_1, B_1, C_1 редом тако да важе распореди $C - A - A_1$, $A - B - B_1$, $B - C - C_1$. Ако је

$$AA_1 : BB_1 : CC_1 = \frac{AB}{BC} : \frac{BC}{AC} : \frac{AC}{AB}\,,$$

доказати да су троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ слични.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Трећи разред – А категорија

1. Наћи све природне бројеве n за које је број $2^n - 1$ дељив са n.

2. Дати су комплексни бројеви a, b, c и полином $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Доказати да важи бар једна од следеће четири неједнакости:

$$|P(1)| \geqslant 1, \quad |P(-1)| \geqslant 1, \quad |P(i)| \geqslant 1, \quad |P(-i)| \geqslant 1.$$

3. Дат је тетраедар $SABC$ код кога је троугао ABC оштроугли и $SA = SB = SC$. Доказати да се тај тетраедар може исећи на коначно много полиедара од којих се може сложити тетраедар подударан са $SABC$, али супротне оријентације.

4. Доказати да постоји природан број n коме су последње четири цифре једнаке 2002, такав да n^{2002} почиње цифрама 2002.

5. Дати су природни бројеви m, n. Правоугаоник чије су странице једнаке m и n издељен је на mn јединичних квадратних поља. За неку праву кажемо да сече неко поље ако садржи бар једну његову унутрашњу тачку. Колико највише поља овог правоугаоника може да сече нека права?

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Четврти разред – А категорија

1. Нека су f и g не-нула полиноми истог степена са целобројним коефицијентима. Ако је $f(n)$ дељиво са $g(n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, доказати да постоји $c \in \mathbb{Z}$ такво да је $f(x) = cg(x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

2. Доказати да је број
$$\left[\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]+1$$
дељив са 7. ($[x]$ је највећи цео број који није већи од x.)

3. Дат је триедар са врхом O, и тачке A, B, C на његовим ивицама које су једнако удаљене од тачке O. Нека је S центар лопте уписане у тај триедар. Доказати да је вектор $\overrightarrow{OS}$ колинеаран са вектором
$$\sin\sphericalangle BOC \cdot \overrightarrow{OA} + \sin\sphericalangle COA \cdot \overrightarrow{OB} + \sin\sphericalangle AOB \cdot \overrightarrow{OC}.$$

4. У кутији се налазе једна плава и 99 црвених куглица. Из кутије се случајно бирају куглице једна за другом и остављају ван кутије све док се не изабере куглица (означимо је са A) која се по боји разликује од претходно изабране куглице. Куглица A се враћа у кутију и експеримент почиње из почетка. Процес се наставља све док се не узму све куглице. Избори куглица су међусобно независни. Колика је вероватноћа да је последња изабрана куглица плава?

5. Доказати да се у координатној равни може нацртати кружница која не пролази ни кроз једну тачку са целобројним координатама, а у чијој се унутрашњости налазе тачно 2002 такве тачке.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Први разред – Б категорија

1. Одредити све просте бројеве p за које су и бројеви p^3+6, p^3-6 прости.

2. Дат је троугао ABC и тачке M, N, P на његовим страницама AB, BC, AC редом, такве да је четвороугао $AMNP$ паралелограм. Посматрајмо кругове описане око троуглова MBN и NCP. Нека су t_1 и t_2 њихове тангенте у тачкама M и P редом. Доказати да је $t_1 \parallel t_2$.

3. Дати су позитивни бројеви a, b, c. Ако је $a^2+b^2+c^2=\dfrac{5}{3}$, доказати да је

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}\,.$$

4. Дат је троугао ABC. Посматрајмо праве које секу странице AC и BC у тачкама M и N редом тако да је $MN=AM+BN$. Доказати да постоји круг k који додирује све такве праве.

5. Дат је скуп $\mathcal{A}=\{1,2,3,\ldots,2002\}$. Колико има подскупова $\mathcal{B}$ скупа $\mathcal{A}$ са следећим својством: ако $x\in\mathcal{B}$ и $y\in\mathcal{B}$, онда $x+y\neq 2003$?

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Други разред – Б категорија

1. Наћи све вредности реалног параметра a тако да систем

$$\begin{aligned} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0 \\ x + 2y + xy + 1 = 0 \end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

2. Дат је трапез $ABCD$, $AB \parallel CD$. Нека је $\{S\} = AC \cap BD$, и p права која садржи тачку S и паралелна је основицама трапеза. Ако су M и N пресечне тачке праве p са крацима трапеза, доказати да је S средиште дужи MN.

3. Дати су позитивни реални бројеви a и b, $a + b = 1$. Ако су a^3 и b^3 рационални, доказати да су и бројеви a, b такође рационални.

4. Нека је $a_1, a_2, \ldots, a_{99}$ низ цифара за које важи: ако је $a_n = 1$, онда $a_{n+1} \neq 2$, и ако $a_n = 3$, онда $a_{n+1} \neq 4$. Доказати да постоје $k, l \in \{1, 2, \ldots, 98\}$, $k \neq l$, такви да је $a_k = a_l$ и $a_{k+1} = a_{l+1}$.

5. Дат је троугао ABC. Нека су A_1, B_1 средишта страница BC, AC редом и T његово тежиште. Ако се у четвороугао B_1TA_1C може уписати круг, доказати да је троугао ABC једнакокрак.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су α и β оштри углови неког троугла. Ако је

$$\sin(\alpha+\beta) - 1 = \sin^2\alpha - \cos^2\beta,$$

доказати да је трећи угао тог троугла прав.

2. У троуглу ABC, странице AC и BC су подударне и $\sphericalangle BCA = 100^\circ$. Унутар тог троугла уочена је тачка M таква да је $\sphericalangle MAB = 30^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 20^\circ$. Одредити $\sphericalangle ACM$.

3. Дат је тетраедар $SABC$ код кога је троугао ABC оштроугли и $SA = SB = SC$. Доказати да се тај тетраедар може исећи на коначно много полиедара од којих се може сложити тетраедар подударан са $SABC$, али супротне оријентације.

4. Доказати да постоји природан број n коме су последње четири цифре једнаке 2002, такав да n^{2002} почиње цифрама 2002.

5. Дати су природни бројеви a, b, c. Доказати да је вредност

$$\frac{1}{2abc}\begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

куб неког природног броја.

Време за рад 240 минута.

Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Четврти разред – Б категорија

1. Шта је веће:

$$\frac{2}{201} \qquad \text{или} \qquad \ln\frac{101}{100}\ ?$$

Образложити одговор.

2. Дати су бројеви $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Ако је $z^n = 1$, доказати да важи

$$1 + 2z + 3z^2 + \cdots + nz^{n-1} = \frac{n}{z-1}\ .$$

3. Дат је триедар са врхом O, и тачке A, B, C на његовим ивицама које су једнако удаљене од тачке O. Нека је S центар лопте уписане у тај триедар. Доказати да је вектор $\overrightarrow{OS}$ колинеаран са вектором

$$\sin\sphericalangle BOC \cdot \overrightarrow{OA} + \sin\sphericalangle COA \cdot \overrightarrow{OB} + \sin\sphericalangle AOB \cdot \overrightarrow{OC}.$$

4. Одредити сва реална решења система

$$\frac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2, \quad \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3, \quad \cdots, \quad \frac{2x_n^2}{1+x_n^2} = x_1.$$

5. Доказати да се у координатној равни може нацртати кружница која не пролази ни кроз једну тачку са целобројним координатама, а у чијој се унутрашњости налазе тачно 2002 такве тачке.

Време за рад 240 минута.