# 42. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**Бечићи, 20.04.2002.**

# ПРВИ РАЗРЕД

**1.** Одредити све реалне бројеве $x$ за које важи

$$\frac{2002[x]}{[-x]+x} > \frac{[2x]}{x-[1+x]}\,.$$

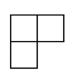
**2.** Нека је $O$ унутрашња тачка троугла $ABC$ и нека праве $AO, BO$ и $CO$ секу странице $BC, CA$ и $AB$ редом у тачкама $A_1, B_1$ и $C_1$. Ако је $AA_1$ највећа од дужи $AA_1, BB_1$ и $CC_1$, доказати да је

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 \leqslant AA_1\,.$$

**3.** Одрадити све парове природних бројева $(n, k)$ за које важи

$$\binom{n}{k} = 2002\,.$$

**4.** Да ли се правоугаоник $2001 \times 2003$ може исећи на фигуре облика



које се састоје од три јединична квадрата?

# 42. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**Бечићи, 20.04.2002.**

## ДРУГИ РАЗРЕД

**1.** Нека су $x, y$ и $z$ реални бројеви за које важи

$$x^2 \leqslant y + z, \quad y^2 \leqslant z + x, \quad z^2 \leqslant x + y.$$

Одредити најмању и највећу могућу вредност за $z$.

**2.** Нека су $A_0, A_1, \ldots, A_{2k}$, тим редом, тачке кружнице, које је деле на $2k + 1$ једнаких лукова. Тачка $A_0$ спојена је тетивама са свим осталим тачкама. Тих $2k$ тетива деле круг на $2k + 1$ делова. Ти делови обојени су наизменично црвеном и плавом бојом, тако да је број црвених делова за један већи од броја плавих делова.

Доказати да је плава површина већа од црвене.

**3.** Нека су $m$ и $n$ природни бројеви. Доказати да је број $2^n - 1$ дељив са $(2^m - 1)^2$ ако и само ако је број $n$ дељив са $m(2^m - 1)$.

**4.** Сваки од петнаест фудбалских тренера рангирао је 50 изабраних фудбалера на места од 1 до 50. За сваког фудбалера разлика између највишег и најнижег места на које је био рангиран није већа од 5. Такође, за сваког фудбалера одређен је збир редних бројева места на која је био рангиран. Тако су добијени збирови $S_1 \leqslant S_2 \leqslant \cdots \leqslant S_{50}$.

Одредити највећу могућу вредност збира $S_1$.

# 42. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

**Бечићи, 20.04.2002.**

## ТРЕЋИ И ЧЕТВРТИ РАЗРЕД

**1.** Нека су $a, b$ и $c$ позитивни, а $m$ и $n$ природни бројеви. Доказати да важи
$$\frac{a^{n+k}}{b^n} + \frac{b^{n+k}}{c^n} + \frac{c^{n+k}}{a^n} \geqslant a^k + b^k + c^k.$$

**2.** Нека је низ $(f_n)_{n\geqslant 1}$ дефинисан са $f_1 = f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ за $n \geqslant 1$. Доказати да је површина троугла чије су странице дужине $\sqrt{f_{2n+1}}, \sqrt{f_{2n+2}}$ и $\sqrt{f_{2n+3}}$ једнака $\dfrac{1}{2}$.

**3.** Нека је $ABCD$ ромб код кога је $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Тачке $S$ и $R$, редом, леже унутар троуглова $ABD$ и $DBC$, тако да је $\sphericalangle SBR = \sphericalangle RDS = 60^\circ$. Доказати да важи $SR^2 \geqslant AS \cdot CR$.

**4.** Да ли постоји природан број $k$, такав да се цифре 3,4,5 и 6 не појављују декадном запису броја $2002! \cdot k$?