ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло. Припремна варијанта, 21. oktobar 2001.

8-9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
4	**1.** Дати су трапез ABCD са основицама AD и BC и тачка K на његовом краку AB. Кроз тачку A конструисана је права l, паралелна правој KC, а кроз тачку B конструисана је права m, паралелна правој KD. Доказати да тачка пресека правих l и m лежи на краку CD.
4	**2.** Славко је помножио првих n природних бројева, а Валерије је помножио првих m парних природних бројева (n и m су већи од 1). Обојица су добили један те исти број. Доказати да је бар један од дечака погрешио.
4	**3.** У Кољиној колекцији се налазе четири царска новчића од по пет рубаља. Рекли су му да су нека два међу њима неисправна. Кољa хоће да провери (да докаже или да оповргне), да ли су међу новчићима тачно два неисправна. Може ли он то да уради помоћу два мерења на теразијама без тегова? (Неисправни новчићи су једнаких тежина, исправни су такође једнаких тежина, али су неисправни лакши од исправних.)
4	**4.** По правој се у једном смеру крећу 5 једнаких куглица, а у сусрет им се крећу 5 других истих таквих куглица. Брзине свих куглица су једнаке. Приликом судара било које две куглице оне се одбију на супротне стране с истом брзином с којом су се кретале до судара. Колико ће се укупно судара десити међу куглицама?
4	**5.** Одабрано је неколико (више од три) тачака у равни. Познато је да ако се избаци произвољна тачка, преостале ће бити симетричне у односу на неку праву. Да ли је тачно да је цео скуп тачака такође симетричан у односу на неку праву?

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА

Јесење коло. Припремна варијанта, 21. октобар 2001.

10-11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени задаци

4

1. Назовимо висином петоугла отсечак нормале спуштене из темена на наспрамну страницу. Назовимо медијаном петоугла отсечак који повезује теме са средиштем наспрамне странице. Познато је да су дужине свих висина и свих медијана неког петоугла једнаке једном истом броју. Доказати да је тај петоугао правилан (то јест да су му странице једнаке и да су му углови једнаки).

4

2. Постоји 1000 узастопних природних бројева међу којима ниједан није прост (на пример: 1001!+2, 1001!+3, ... , 1001!+1001). А да ли постоји 1000 узастопних природних бројева, међу којима је тачно 5 простих?

4

3. По правој се у једном смеру крећу 5 једнаких куглица, а у сусрет им се крећу 5 других истих таквих куглица. Брзине свих куглица су једнаке. Приликом судара било које две куглице оне се одбију на супротне стране с истом брзином с којом су се кретале до судара. Колико ће се укупно судара десити међу куглицама?

4

4. На квадратној торти су распоређене ~~квадратне~~ ТРОУГЛАСТЕ чоколадице, које се међусобно не додирују. Да ли је увек могуће исећи торту на конвексне полигоне, тако да сваки полигон садржи тачно једну чоколадицу? (Сматрамо да је торта раван квадрат. Фигуру називамо конвексном, ако она са произвољне две своје тачке садржи и дуж која их повезује.)

4

5. У левом доњем углу шаховске табле, а такође на суседном горњем и суседном десном пољу налази се по бели топ. Дозвољено је повлачити потезе по уобичајеним правилима, али тако да после сваког потеза сваки од топова буде под заштитом неког другог топа. Могу ли се у неколико потеза преместити та три топа тако да сваки доспе на поље симетрично полазном у односу на дијагоналу која повезује десни доњи и леви горњи угао табле?

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Основна варијаната, 28. октобар 2001.
8 - 9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени	задаци
4	**1.** Постоје ли такви природни бројеви $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{100}$, да је $[a_1,a_2]>[a_2,a_3]>\ldots>[a_{99},a_{100}]$? ($[a,b]$ је најмањи заједнички садржалац бројева a и b, тј. најмањи природан број који је дељив и са a и са b.)
5	**2.** N црвених и N плавих тачака, које се строго смењују, деле кржницу на $2N$ лукова, тако да произвољна два суседна лука имају различите дужине. При томе је дужина сваког од тих лукова једнака једном од три броја: a, b или c. Доказати да N-тоугао с црвеним теменима и N-тоугао с плавим теменима имају једнаке обиме и једнаке површине.
5	**3.** Дата је таблица $(n-2)\times n$, $n>2$, у чије је свако поље уписан цео број од 1 до n, при чему су у свакој врсти сви бројеви различити и у свакој колони сви бројеви различити. Доказати да је ту таблицу могуће допунити до квадратне таблице $n\times n$, у чије је свако ново поље такође уписан неки цео број од 1 до n, тако да као и раније у свакој врсти и свакој колони бројеви буду различити.
5	**4.** Правилан $(2n+1)$-угао је разложен дијагоналама на $2n-1$ троуглова. Доказати да су међу њима бар три једнакокраки.
6	**5.** Саша поставља топове на празну шаховску таблу: првог - где хоће, а сваког следећег поставља тако да туче непаран број раније постављених топова. Који највећи број топова он може тако да постави? (Као и обично, топови туку један другог по вертикали и хоризонтали само ако међу њима нема других топова.)
8	**6.** У врсти је записано неколико бројева. Сваке секунде робот бира неки пар бројева који стоје један до другог, у коме је леви број већи од десног, мења им места и при том оба броја множи са 2. Доказати да после неког времена неће бити могуће да се изврши следећа таква операција.
8	**7.** Познато је да број 2^{333} има 101 цифру и да почиње цифром 1. Колико бројева у низу 2, 4, 8, 16, ..., 2^{333} почиње цифром 4?

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Јесење коло. Основна варијанта, 28. октобар 2001.
10 - 11 разред (старији узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају)

поени	задаци
4	**1.** У равни су дате три црвене тачке, три плаве тачке и још тачка O. Познато је да тачка O лежи унутар троугла с црвеним теменима и унутар троугла с плавим теменима, при чему је растојање од O до произвољне црвене тачке мање од растојања од O до произвољне плаве тачке. Могу ли све црвене и све плаве тачке да леже на једној кружници?
5	**2.** Постоје ли такви природни бројеви $a_1<a_2<a_3<\ldots<a_{100}$, да је $[a_1,a_2]>[a_2,a_3]>\ldots>[a_{99},a_{100}]$? ($[a,b]$ је најмањи заједнички садржалац бројева a и b, тј. најмањи природан број који је делив и са a и са b.)
6	**3.** Поља шаховске табле су нумерисана бројевима од 1 до 64, тако да суседни бројеви леже на суседним пољима (са заједничком страницом). Која је најмања могућа сума бројева на дијагонали?
6	**4.** Нека је F_1, F_2, F_3, ... низ конвексних четвороуглова, где се F_{k+1} (за $k=1,2,3,\ldots$) добија овако: F_k се расече по дијагонали, један од делова се преврне и слепи по линији расецања с другим делом. Који највећи број различитих четвороуглова може да садржи тај низ? (Различити су они многоуглови, који се не могу пресликати кретањем један у другог.)
7	**5.** У бесконачној аритметичкој прогресији сви су бројеви природни. У сваком члану је могуће подвући једну или неколико узастопних цифара, тако да је у првом члану подвучена цифра 1, у другом - 2, и тако даље (за произвољан природан број n у n-том члану су подвучене цифре које формирају број n). Доказати да је разлика прогресије степен броја 10.
7	**6.** У реду стоје 23 кутије са куглицама, при чему за произвољно n од 1 до 23 постоји кутија у којој се налази тачно n куглица. У једној операцији је могуће преместити у произвољну кутију још толико куглица колико се у њој већ налази, из било које друге кутије у којој је више куглица. Да ли је увек могуће таквим операцијама добити да се у првој кутији нађе 1 куглица, у другој - 2 куглице, и тако даље, у 23-ој - 23 куглице?
	7. У координатној равни је постављен троугао, тако да се његове слике добијене транслацијама за векторе с целобројним координатама не прекривају.
3	а) Може ли површина таквог троугла бити већа од 1/2?
6	б) Нађи највећу могућу површину таквог троугла.