ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Припремна варијанта, 24. фебруар 2002.
8 - 9 разред (млађи узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена; поени за тачке једног задатка се сабирају.)

поени задаци

4 **1.** Дато је пуно једнаких правоугаоних картона димензија $a \times b$ cm, где су a и b цели бројеви, при чему је a мање од b. Познато је да се од таквих картона могу саставити правоугаоник 49×51 cm, и правоугаоник 99×101 cm. Да ли се на основу тих података могу једнозначно одредити a и b?

5 **2.** Може ли се било који троугао разрезати на четири конвексне фигуре: троугао, четвороугао, петоугао и шестоугао?

5 **3.** За природне бројеве x и y број x^2+xy+y^2 се у декадном запису завршава нулом. Доказати да се он завршава са бар две нуле.

5 **4.** Странице AB, BC, CD и DA четвороугла $ABCD$ додирују неку кружницу у тачкама K, L, M и N редом, S је тачка пресека дужи KM и LN. Познато је да се око четвороугла $SKBL$ може описати кружница. Доказати да се око четвороугла $SNDM$ такође може описати кружница.

3 **5.** а) Дато је 128 новчића двеју различитих тежина, новчића сваке од тежина подједнако много. Како да се помоћу теразија без тегова сигурно нађу два новчића различите тежине са не више од 7 мерења?

3 б) Дато је осам новчића двеју различитих тежина, новчића сваке од тежина подједнако много. Како да се помоћу теразија без тегова сигурно нађу два новчића различите тежине са два мерења?

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Припремна варијанта, 24. фебруар 2002.
10 - 11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени	задаци
4	**1.** За природне бројеве x и y број x^2+xy+y^2 се у декадном запису завршава нулом. Доказати да се он завршава са бар две нуле.
5	**2.** Од папира су изрезана два једнака троугла ABC и A'B'C' и положена на сто, при чему је један од њих преврнут. Доказати да средишта дужи AA', BB' и CC' леже на једној правој.
5	**3.** Дато је 6 комада сира различитих тежина. Познато је да се сир може поделити на две гомиле од по три комада, тако да обе гомиле имају једнаке тежине. Како је то могуће извести са два мерења на теразијема без тегова, ако се за свака два комада види одока који је тежи?
5	**4.** На колико је начина могуће распоредити бројеве од 1 до 100 у правоугаоник 2×50, тако да било која два броја који се разликују за 1 буду у пољима која имају заједничку страницу?
6	**5.** Да ли постоји правилна троугаона призма коју је могуће облепити (без преклапања) различитим једнакостраничним троугловима? (Дозвољено је превијати троуглове преко ивица призме.)

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА
Пролећно коло. Основна варијанта, 3. март 2002.
8 - 9 разред (млађи узраст)
(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени	задаци
4	**1.** Нека су a, b и c дужине страница троугла. Доказати неједнакост $a^3+b^3+3abc>c^3$.
4	**2.** На шаховској табли димензија 23×23 поља стоје четири фигуре: у левом доњем и десном горњем углу табле по бела фигура, а у левом горњем и десном доњем углу табле по црна. Беле и црне фигуре се померају наизменично, почињу беле. Сваким потезом једна од фигура се помера на произвољно суседно (са заједничком страницом) слободно поље. Беле фигуре настоје да стигну на два суседна поља. Могу ли црне фигуре да их спрече у томе?
6	**3.** У конвексном четвороуглу ABCD тачке E и F су средишта страница BC и CD редом. Дужи AE, AF и EF разлажу четвороугао на четири троугла чије су површине једнаке узастопним природним бројевима. Која је највећа могућа површина троугла ABD?
7	**4.** У низ је поређано n сијалица и неке од њих су упаљене. Сваког минута после тога све сијалице које су биле упаљене протеклог минута се гасе, а угашене сијалице које су протеклог минута биле суседне са тачно једном упаљеном сијалицом се пале. За које n је могуће тако упалити неке сијалице на почетку, да после тога у сваком моменту бар једна сијалица буде упаљена?
7	**5.** Оштроугли троугао се разрезује праволинијским резом на два (не обавезно троугаона) дела, затим се један од тих делова опет разрезује на два дела, и тако даље: у сваком кораку се бира један од већ постојећих делова и разрезује се (по правој) на два дела. После неколико корака се испоставило да је полазни троугао разложен на неколико троуглова. Могу ли сви они бити тупоугли?
7	**6.** У растућем бесконачном низу природних бројева сваки број, почев од 2002-ог, је делилац збира претходних бројева. Доказати да је у том низу сваки број, почев од неког места, једнак збиру претходних бројева.
8	**7.** С низом домина, поређаним по уобичајеним правилима, дозвољено је обављати следећу операцију: бира се одсечак од неколико узастопних домина са једнаким ознакама на крајевима одсечка, обрће се и поставља на исто место. Доказати да ако два низа састављена од два једнака комплета домина имају једнаке ознаке на крајевима, онда се дозволеним операцијама може добити да поредак домина у другом низу буде једнак поретку домина у првом низу.

ДВАДЕСЕТ ТРЕЋИ ТУРНИР ГРАДОВА

Пролећно коло. Основна варијанта, 3. март 2002.

10 - 11 разред (старији узраст)

(Резултат се рачуна на основу три задатка на којима је добијено највише поена.)

поени	задаци
4	**1.** Тангенси углова неког троугла су цели бројеви. Наћи те тангенсе.
4	**2.** Да ли је тачно да на графику функције $y=x^3$ постоји тачка A, а на графику функције $y=x^3+\|x\|+1$ постоји тачка B, тако да растојање AB није веће од 1/100?
5	**3.** У растућем бесконачном низу природних бројева сваки број, почев од 2002-ог, је делилац збира претходних бројева. Доказати да је у том низу сваки број, почев од неког места, једнак збиру претходних бројева.
5	**4.** Група гледалаца је купила све карте у једном реду, али су тамо поседали на произвољан начин, при чему нико није сео на своје место. Разводник може да промени места произвољним суседима који не седе на својим местима, и тако више пута. Да ли је тачно да при произвољном почетном распореду разводник може, радећи тако, сваког гледаоца да смести на своје место?
6	**5.** Нека су AA_1, BB_1 и CC_1 висине оштроуглог троугла ABC; O_A, O_B и O_C - центри кругова уписаних у троуглове AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 редом; T_A, T_B и T_C - тачке додира круга уписаног у троугао ABC са страницама BC, CA и AB редом. Доказати да су све странице шестоугла $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ једнаке.
7	**6.** Шпил од 52 карте је распоређен у облику правоугаоника 4×13. Познато је да ако две карте леже једна до друге по вертикали или по хоризонтали, онда су оне исте боје или исте вредности. Доказати да су у сваком хоризонталном реду (од 13 карата) све карте исте боје.
8	**7.** Да ли постоје такви ирационални бројеви a и b, да је $a>1$, $b>1$, и да је $[a^m]$ различито од $[b^n]$ за произвољне природне бројеве m и n? ($[x]$ означава цео део броја x, то јест највећи цео број који није већи од x.)