20. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Тирана, Албанија – 4. мај 2011.

1. Да ли постоји скуп B, који се састоји од 4004 природна броја, такав да за сваки његов подскуп A, који има 2003 елемента, важи да збир елемената скупа A није дељив са 2003? *(Македонија)*

2. Нека је ABC троугао, такав да важи $|AB| \neq |AC|$. Нека је D тачка пресека тангенте на описану кружницу троугла ABC у тачки A и праве BC. Нека су E и F тачке на симетралама дужи AB и AC редом, такве да су BE и CF нормалне на BC. Доказати да су тачке D, E и F колинеарне. *(Румунија)*

3. Наћи све функције $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ које задовољавају следеће услове:
(1) $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy$, за свако $x, y \in \mathbb{Q}$;
(2) $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x$, за свако $x \in \mathbb{Q}$;
(3) $f(1) + 1 > 0$. *(Кипар)*

4. Нека су m и n узајамно прости непарни природни бројеви. Правоугаоник $ABCD$, такав да је $|AB| = m$ и $|AD| = n$, подељен је на mn јединичних квадрата. Означимо са $A_1, A_2, \ldots, A_k$ узастопне пресечне тачке дијагонале AC са страницама јединичних квадрата ($A_1 = A, A_k = C$). Доказати да важи:

$$\sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} |A_j A_{j+1}| = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn} \ .$$

(Бугарска)

Време за рад 270 минута.
Сваки задатак вреди 10 поена.