

44. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА  
Јапан – Токио, 11.–19. јул 2003.

Први дан  
недеља, 13. јул 2003.

1. Нека је  $A$  подскуп скупа  $S = \{1, 2, \dots, 1\,000\,000\}$ , који садржи тачно 101 елемент. Доказати да постоје бројеви  $t_1, t_2, \dots, t_{100}$  из  $S$  такви да су скупови

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{за } j = 1, 2, \dots, 100$$

по паровима дисјунктни. (Бразил)

2. Одредити све парове  $(a, b)$  природних бројева такве да је

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

природан број. (Бугарска)

3. Дат је конвексан шестоугао код кога за сваке две наспрамне странице важи: растојање између њихових средишта једнако је збиру њихових дужина помноженом са  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Доказати да су сви углови тог шестоугла једнаки. (Конвексан шестоугао  $ABCDEF$  има три пара наспрамних страница:  $AB$  и  $DE$ ,  $BC$  и  $EF$ ,  $CD$  и  $FA$ .) (Пољска)

Време за рад: 4 сата и 30 минута  
Сваки задатак вреди 7 поена

44. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА  
Јапан – Токио, 11.–19. јул 2003.

Други дан  
понедељак, 14. јул 2003.

4. Нека је  $ABCD$  тетиван четвороугао. Нека су  $P$ ,  $Q$  и  $R$  подножја нормала из тачке  $D$  на праве  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  редом. Доказати да је  $PQ = QR$  ако и само ако се симетрале углова  $\sphericalangle ABC$  и  $\sphericalangle ADC$  секу на правој  $AC$ . (Финска)
5. Нека је  $n$  природан број и  $x_1, x_2, \dots, x_n$  реални бројеви такви да је  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ .  
а) Доказати да је

$$\left( \sum_{i,j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i,j=1}^n (x_i - x_j)^2.$$

- б) Доказати да једнакост вреди ако и само ако је  $x_1, x_2, \dots, x_n$  аритметичка прогресија. (Ирска)
6. Нека је  $p$  прост број. Доказати да постоји прост број  $q$  такав да, за сваки цео број  $n$ , број  $n^p - p$  није дељив са  $q$ . (Француска)

Време за рад: 4 сата и 30 минута  
Сваки задатак вреди 7 поена