44. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Токио, Јапан – недеља, 13. јул 2003.

1. Нека је A подскуп скупа $S = \{1, 2, \ldots, 1\,000\,000\}$, који садржи тачно 101 елемент. Доказати да постоје бројеви $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ из S такви да су скупови

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad \text{за} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

по паровима дисјунктни. *(Бразил)*

2. Одредити све парове (a, b) природних бројева такве да је

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

природан број. *(Бугарска)*

3. Дат је конвексан шестоугао код кога за сваке две наспрамне странице важи: растојање између њихових средишта једнако је збиру њихових дужина помноженом са $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Доказати да су сви углови тог шестоугла једнаки.
(Конвексан шестоугао $ABCDEF$ има три пара наспрамних страница: AB и DE, BC и EF, CD и FA.) *(Пољска)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

44. МЕЂУНАРОДНА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Токио, Јапан – понедељак, 14. јул 2003.

4. Нека је $ABCD$ тетиван четвороугао. Нека су P, Q и R подножја нормала из тачке D на праве BC, CA и AB редом. Доказати да је $PQ = QR$ ако и само ако се симетрале углова $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ADC$ секу на правој AC. *(Финска)*

5. Нека је n природан број и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ реални бројеви такви да је $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.
а) Доказати да је

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leqslant \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

б) Доказати да једнакост важи ако и само ако је $x_1, x_2, \ldots, x_n$ аритметичка прогресија. *(Ирска)*

6. Дат је прост број p. Доказати да постоји прост број q такав да, за сваки цео број n, број $n^p - p$ није дељив са q. *(Француска)*

Language: Serbian

Време за рад: 4 сата и 30 минута
Сваки задатак вреди 7 поена

РЕШЕЊА

1. Посматрајмо скуп $D = \{x - y \mid x, y \in A\}$. Јасно је да скуп D има највише $101 \cdot 100 + 1$ елемената. Скупови $A_i = t_i + A$ и $A_j = t_j + A$ су дисјунктни ако и само ако $t_i - t_j \notin D$. Тражених 100 бројева $t_1, \dots, t_{100}$ бирамо индуктивно.

За почетак, одаберимо произвољан број $t_1 \in S \setminus D$. Претпоставимо да смо одабрали $k \leqslant 99$ бројева $t_1, \dots, t_k \in D$ тако да разлика никоја два од њих не припада скупу D. За t_{k+1} довољно је узети било који број из S који не припада скуповима $t_1 + D, t_2 + D, \dots, t_k + D$ - то се може урадити јер је $|t_i + D| \leqslant 101 \cdot 100 + 1$ за свако i и одатле $|\bigcup_{i=1}^{k}(t_i + D)| \leqslant 99(101 \cdot 100 + 1) = 999999 < 1000000$.

2. Нека је $a^2 = k(2ab^2 - b^3 + 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Из $2ab^2 \geqslant b^3$ следи $b \leqslant 2a$. С друге стране, ако је $b \geqslant a$, онда је $b^2 \geqslant a^2 \geqslant b^2(2a - b) + 1$, па у том случају мора бити $b = 2a$.

За дато b и k, број a је корен квадратне једначине $x^2 - 2kb^2x + k(b^3 - 1) = 0$. Ова једначина има два решења $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$: нека је $a_1 \geqslant a_2$. Из $a_1 + a_2 = 2kb^2$ следи $a_1 \geqslant kb^2$, па је $0 \leqslant a_2 = \frac{k(b^3-1)}{a_1} \leqslant \frac{k(b^3-1)}{kb^2} < b$, али на основу претходног тада мора бити $b = 2a_2$ или $a_2 = 0$.

Ако је $a_2 = 0$, онда је $b = 1$ и $a_1 = 2k$. Ако је $b = 2a_2$, онда је $k = a_2^2$ и $a_1 = 2kb^2 - a_2 = 8a_2^4 - a_2$. Према томе, једина решења су

$$(a, b) \in \{(2t, 1), (t, 2t), (8t^4 - t, 2t) \mid t \in \mathbb{N}\}.$$

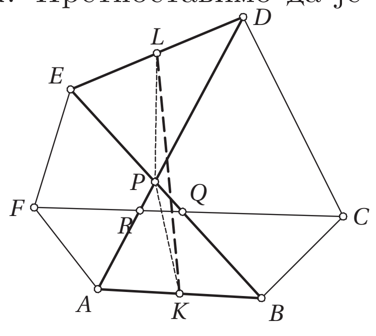
Лако се проверава да су ови парови заиста решења.

3. Нека је $ABCDEF$ дати шестоугао. Користићемо следеће тврђење.

Лема. Ако је $\sphericalangle XZY \geqslant 60^\circ$ и M је средиште дужи XY, онда је $MZ \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}XY$, при чему једнакост важи ако и само ако је $\triangle XYZ$ једнакостраничан.

Доказ. Нека је Z' тачка таква да је $\triangle XYZ'$ једнакостраничан и Z, Z' су са исте стране праве XY. Тада је Z унутар описаног круга $\triangle XYZ'$, па је $MZ \leqslant MZ' = \frac{\sqrt{3}}{2}XY$; једнакост важи ако и само ако је $Z = Z'$. $\square$

Означимо $AD \cap BE = P$, $BE \cap CF = Q$ и $CF \cap AD = R$. Претпоставимо да је $\sphericalangle APB = \sphericalangle DPE > 60^\circ$; тада, ако су K, L редом средишта дужи AB и DE, на основу леме је $KL \leqslant PK + PL < \frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) = KL$, што је контрадикција. Према томе, $\sphericalangle APB \leqslant 60^\circ$; аналогно, $\sphericalangle BQC \leqslant 60^\circ$ и $\sphericalangle CRD \leqslant 60^\circ$. Како је збир углова APB, BQC, CRD једнак 180°, сва три угла морају бити једнака 60°, и шта више, троуглови APB,



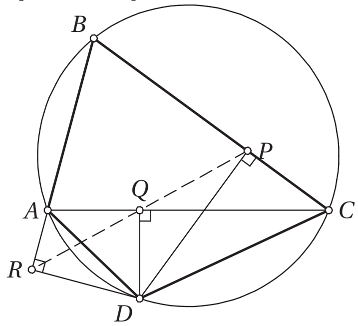
BQC, CRD морају бити једнакостранични. Следи да је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABP + \sphericalangle QBC = 120^\circ$; слично су и остали углови шестоугла једнаки 120°.

Друго решење. Радијус вектор произвољне тачке X означаваћемо просто са X.

Радијус вектори средишта K и L страница AB и DE су $\frac{A+B}{2}$ и $\frac{D+E}{2}$ редом, па нам услов задатка и неједнакост троугла дају $|\frac{A+B-D-E}{2}|^2 = \frac{3}{4}(|A-B|+|D-E|)^2 \geqslant \frac{3}{4}|A-B-D+E|^2$, што је еквивалентно са $A^2+B^2+D^2+E^2-4A\cdot B-2A\cdot D+4A\cdot E+4B\cdot D-2B\cdot E-4D\cdot E \leqslant 0$. Сабирањем са аналогним неједнакостима за друга два пара наспрамних страница добијамо $2(A-B+C-D+E-F)^2 \leqslant 0$. Одавде следи да је $A-B+C-D+E-F=0$, тј. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{ED}=0$. Све неједнакости морају бити једнакости, па тако имамо $|A-B|+|D-E| = |A-B-D+E|$, одакле је $AB \parallel DE \parallel CF$; аналогно је $BC \parallel EF \parallel AD$ и $CD \parallel AF \parallel BE$.

Нека је $Y = EF \cap AB$. Како је $\frac{1}{2}|\overrightarrow{EY}+\overrightarrow{EB}| = LK = \frac{\sqrt{3}}{2}(AB+DE) = \frac{\sqrt{3}}{2}YB = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EY}|$, квадрирањем следи $EY^2+EB^2 = 2YB^2$. Слично је $EY^2+YB^2 = 2EB^2$, па је троугао EYB једнакостраничан и $\sphericalangle DEF = 180^\circ - \sphericalangle EYB = 120^\circ$.

4. Ако симетрале углова ABC и ADC редом секу дуж AC у тачкама K и L, важи $AB/BC = AK/KC$ и $AD/DC = AL/LC$, па је $K \equiv L$ еквивалентно са $AB/BC = AD/DC$.



С друге стране, P и Q су на кругу над пречником CD, па је $PQ = CD \sin\sphericalangle PCQ = CD\sin\sphericalangle ACB = \frac{AB\cdot CD}{2r}$, где је r полупречник круга $ABCD$. Слично, $QR = \frac{BC\cdot AD}{2r}$, па је и $PQ = QR$ еквивалентно са $AB/BC = AD/DC$.

5. Примена Коши-Шварцове неједнакости на низове $|i-j|$ и $|x_i-x_j|$ даје

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^2\right)\left(\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2\right) \geqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n}|i-j||x_i-x_j|\right)^2, \qquad (*)$$

при чему једнакост важи ако и само ако постоји λ тако да је $x_i - x_j = \lambda(i-j)$, што значи да је (x_i) аритметичка прогресија.

Остаје да средимо обе стране у $(*)$. Лако се доказује, нпр. индукцијом, да је

$$\sum_{i,j=1}^{n}(i-j)^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{6} \quad \text{и} \quad \sum_{i,j=1}^{n}|i-j||x_i-x_j| = \frac{n}{2}\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|.$$

Сада $(*)$ постаје $\frac{n^2(n^2-1)}{6}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2\right) \geq \frac{n^2}{4}\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2$, што се своди на тражену неједнакост.

Друго решење. Транслацијом по потреби, смемо да претпоставимо да је $\sum x_i = 0$. Тада је по Коши-Шварцовој неједнакости

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}|x_i-x_j|\right)^2=\left(2\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)x_i\right)^2\leqslant\left(4\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)=\frac{4n(n^2-1)}{3}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$$
$$=\frac{4(n^2-1)}{3}\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right)=\frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-x_j)^2.$$

6. Претпоставимо да за сваки прост број q постоји n за које је $n^p \equiv p \pmod q$. Знамо да за $q \not\equiv 1 \pmod p$ степени n^p дају све могуће остатке по модулу q. Зато морамо да тражимо q у облику $q = kp+1$ $(k \in \mathbb{N})$. Како је $p^k \equiv n^{kp} = n^{q-1} \equiv 1 \pmod q$, имамо $q \mid p^k - 1$ за свако такво q.

Посматрајмо било који прост делилац q броја $N = \frac{p^p-1}{p-1} = p^{p-1} + \cdots + p + 1$. Како $q \nmid p-1$ због $N \equiv p \equiv 1 \pmod{p-1}$, поредак броја p по модулу q је p, те је заиста $q = kp+1$ за неко k. Сада из $q \mid p^k - 1, p^p - 1$ следи да $q \mid p^{(p,k)} - 1$, што повлачи $(p,k) > 1$, тј. $p \mid k$ и одатле $q \equiv 1 \pmod{p^2}$. Дакле, сви прости делиоци броја N су облика p^2x+1 $(x \in \mathbb{N})$, али то је немогуће јер $N \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.