

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**29.03.2003.**

Први разред – А категорија

1. Нека су  $x$  и  $y$  ненегативни реални бројеви такви да је  $x + y = 2$ . Доказати да важи

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2.$$

Када важи једнакост?

2. Дат је број  $2^k$ ,  $k > 3$ . Доказати да се пермутацијама цифара овог броја не може добити број  $2^n$ , где је  $n > k$ .
3. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.
4. Кружница која је уписана у троугао  $ABC$  додирује странице  $AB$  и  $AC$  редом у тачкама  $M$  и  $N$ . Нека је  $P$  тачка пресека симетрале угла  $\sphericalangle ABC$  и праве  $MN$ . Доказати да је површина троугла  $ABC$  два пута већа од површине троугла  $ABP$ .
5. На страницама  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  троугла  $ABC$  уочене су тачке  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , редом. Нека је  $T$  тежиште троугла  $ABC$ , а  $T_1$  тежиште троугла  $A_1B_1C_1$ . Доказати да је  $T \equiv T_1$  ако и само ако је

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Други разред – А категорија

1. Доказати да квадратне једначине  $ax^2 + bx + c = 0$  и  $bx^2 + cx + a = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$ , имају заједничко решење ако и само ако важи  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .
2. Нека је  $S$  подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су  $a, b \in S$ , онда је и  $a \cdot b \in S$ ). Нека су  $T$  и  $U$  дисјунктни подскупови скупа  $S$ , чија је унија цео скуп  $S$ . Познато је да производ ма која три елемента скупа  $T$  (не обавезно различита) припада скупу  $T$  и да производ ма која три елемента из  $U$  припада скупу  $U$ . Доказати да је бар један од подскупова  $T$  и  $U$  затворен у односу на множење.
3. Нека су  $a, b, c$  реални бројеви, такви да је  $0 < a \leq b \leq c$ . Доказати да важи
$$(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \geq 60abc.$$
Када важи једнакост?
4. Да ли је могуће једнакостранични троугао странице 3 разрезати на 2003 дисјунктна троугла, тако да сваки од њих има све странице веће од 1?
5. Круг  $k$  у тачкама  $P$  и  $Q$  додирује краке угла  $\sphericalangle POq$ . На полуправој  $Oq$  је дата тачка  $X$ , тако да пресечна тачка  $Z$  круга  $k$  и праве  $PX$  различита од  $P$  полови дуж  $PX$ . Ако је  $Y$  пресечна тачка круга  $k$  и праве  $OZ$  различита од  $Z$ , доказати да је  $PX \parallel QY$ .

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Трећи разред – А категорија

1. а) Да ли постоји неконстантан низ природних бројева  $a_1, a_2, \dots$  такав да за свако  $k \geq 2$  важи

$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}} ?$$

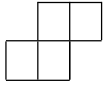
- б) Да ли постоји неконстантан низ природних бројева  $a_1, a_2, \dots, a_{2003}$  такав да за свако  $2 \leq k \leq 2002$  важи

$$a_k = \frac{2a_{k-1}a_{k+1}}{a_{k-1} + a_{k+1}} ?$$

2. Нека је  $p > 2$  прост број. Доказати да је сваки делилац броја  $2^p - 1$  облика  $2kp + 1$  за неко природно  $k$ .
3. Нека је  $O$  центар описане кружнице, а  $T$  тежиште троугла  $ABC$ , који није једнакостраничан. Доказати да је  $OT$  нормална на тежишну дуж  $CC_1$  ако и само ако за странице троугла важи  $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$ .
4. Нека је  $n \geq 3$ , а  $a_1, a_2, \dots, a_n$  реални бројеви такви да је  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Доказати да важи

$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n \leq \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{3} \right)^3.$$

Када важи једнакост?

5. Колико се највише фигура подударних са  може поставити у таблу  $2003 \times 2003$  без преклапања тако да свака фигура покрива тачно 4 јединична поља?

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Четврти разред – А категорија

1. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева  $V$  таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је  $V$ , површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.
2. Нека је  $p > 2$  прост број. Доказати да је сваки делилац броја  $2^p - 1$  облика  $2kp + 1$  за неко природно  $k$ .
3. Нека је  $O$  центар описане кружнице, а  $T$  тежиште троугла  $ABC$ , који није једнакостраничан. Доказати да је  $OT$  нормална на тежишну дуж  $CC_1$  ако и само ако за странице троугла важи  $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$ .
4. Нека је  $n \geq 3$ , а  $a_1, a_2, \dots, a_n$  реални бројеви такви да је  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Доказати да важи

$$a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n \leq \left( \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{3} \right)^3.$$

Када важи једнакост?

5. На кружници је дато  $n$  тачака. Никоје три дужи које се добијају спајањем ових тачака се не секу у једној тачки унутар круга. На колико области ове дужи деле круг?

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**29.03.2003.**

Први разред – Б категорија

1. Доказати да за све реалне  $x$  и  $y$  важи

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 \geq 1.$$

Када важи једнакост?

2. Наћи најмањи природан број који је четири пута мањи од броја написаног истим цифрама, али у обрнутом поретку.
3. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој посла-  
ле писмо.
4. Ако су  $x, y, z, u$  природни бројеви већи од 1, такви да важи  $xy = zu$ , доказати да је број

$$\frac{(x+z)(x+u)(y+z)(y+u)}{(x+y+z+u)^2}$$

сложен природан број.

5. Дат је полукруг над пречником  $AB$  и на њему тачке  $C$  и  $D$  тако да је  $\sphericalangle CSD$  прав, где је  $S$  средиште дужи  $AB$ . Нека је  $E$  пресек правих  $AC$  и  $BD$ , а  $F$  пресек правих  $AD$  и  $BC$ . Доказати да је  $EF \perp AB$  и  $EF = AB$ .

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**29.03.2003.**

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} + (3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = 2.$$

2. Нека је  $S$  подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су  $a, b \in S$ , онда је и  $a \cdot b \in S$ ). Нека су  $T$  и  $U$  дисјунктни подскупови скупа  $S$ , чија је унија цео скуп  $S$ . Познато је да производ ма која три елемента скупа  $T$  (не обавезно различита) припада скупу  $T$  и да производ ма која три елемента из  $U$  припада скупу  $U$ . Доказати да је бар један од подсупова  $T$  и  $U$  затворен у односу на множење.
3. Дата је квадратна једначина  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Ако су оба решења једначине реална и припадају интервалу  $(0, 1)$ , доказати да је  $a(2c + b) < 0$ .
4. У кружни одсечак коме одговара централни угао од  $120^\circ$  уписан је квадрат. Одредити дужину странице квадрата, ако је полупречник круга  $2 + \sqrt{19}$ .
5. Доказати да је број  $\left( \sqrt[6]{8\sqrt{5} + 16} + \sqrt{\sqrt{5} + 1} \right) \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 1}$  цео и израчунати га.

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

**29.03.2003.**

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати дужину полупречника лопте уписане у тространу пирамиду  $SABC$ , ако су ивице  $SA, SB$  и  $SC$  међусобно нормалне и  $AB = BC = a, BS = b$ .

2. Решити систем у зависности од реалног параметра  $a$ :

$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + 6ay + z &= 6 \\ x + by + az &= 1. \end{aligned}$$

3. Нека су  $a, b, c, d$  странице, а  $P$  површина конвексног четвороугла. Доказати да важи  $P \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$ . Када важи једнакост?
4. Нека је  $E$  средиште странице  $AB$  квадрата  $ABCD$ , а  $F$  и  $G$  тачке на страницама  $BC$  и  $CD$ , редом, такве да је  $EF \parallel AG$ . Доказати да је  $FG$  тангента на круг уписан у квадрат  $ABCD$ .
5. Ако за оштре углове  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  важи  $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta, \cos \beta = \operatorname{tg} \gamma$  и  $\cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha$ , доказати да је  $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева  $V$  таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је  $V$ , површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.

2. Наћи  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{2003} - 1) - 2003(x - 1)}{(x - 1)^2}$ .

3. Решити систем

$$x - y + z = 6, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 14, \quad x^3 - y^3 + z^3 = 36.$$

4. Одредити тачку на елипси  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$  у првом квадранту, такву да тангента на елипсу у тој тачки гради са координатним осама троугао најмање површине.

5. Дат је низ тачака  $T_i(x_i, y_i)$  у  $xOy$  равни, тако да је

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0 \text{ и } x_{n+1} = \sqrt{3}x_n - y_n, \quad y_{n+1} = x_n + \sqrt{3}y_n \text{ за } n \geq 0.$$

У ком квадранту се налази тачка  $T_{2003}$ ?

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.