43. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Нови Сад, 19.04.2003.

Први разред

1. Одредити број решења једначине

$$x_1^4 + x_2^4 + \cdots + x_{10}^4 = 2011$$

у скупу природних бројева.

2. У координатној равни је дата дуж AB дужине 2003. Колики је највећи број јединичних квадрата чија темена имају целобројне координате и које дата дуж сече?
Дуж сече јединични квадрат ако садржи бар једну његову унутрашњу тачку, тј. тачку која није на контури квадрата.

3. Нека су a, b, c странице троугла чији су одговарајући углови $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 80°$. Доказати да је

$$a(a + b + c) = b(b + c).$$

4. У равни је дат оштар угао са теменом O и крацима Op_1 и Op_2. Нека је k_1 кружница чији центар припада краку Op_1 и која додирује крак Op_2. Кружница k_2 додирује краке угла и кружницу k_1 споља. Одредити геометријско место тачака додира кружница k_1 и k_2, када центар кружнице k_1 пролази полуправу Op_1.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

43. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Нови Сад, 19.04.2003.

Други разред

1. Дат је троугао ABC са страницама a, b, c и површином S.
(а) Доказати да постоји троугао $A_1B_1C_1$ са страницама $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$.
(б) Ако је S_1 површина троугла $A_1B_1C_1$, доказати да је $S_1^2 \geqslant \dfrac{S\sqrt{3}}{4}$.

2. Нека је $ABCD$ квадрат уписан у кружницу k и P произвољна тачка те кружнице. Доказати да је бар једна од дужина PA, PB, PC, PD ирационална.

3. Нека је $ABCD$ правоугаоник. У појасу између паралелних правих AB и CD одредити скуп тачака из којих се дужи AB и CD виде под истим углом.

4. Подскуп S скупа природних бројева $\mathbb{N}$ има следећа својства:
(i) међу сваких 2003 узастопних природних бројева постоји један који је садржан у S;
(ii) ако $n \in S$ и $n > 1$, онда и $\left[\frac{n}{2}\right] \in S$.
Доказати да је $S = \mathbb{N}$.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

43. САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

Нови Сад, 19.04.2003.

Трећи и четврти разред

1. Доказати да је за сваки природан број n број $[(5+\sqrt{35})^{2n-1}]$ дељив са 10^n.

2. Дата је функција $f\,[0,1] \to \mathbf{R}$ која има следећа својства:
(i) $f(x) \geqslant 0$ за све $x \in [0,1]$;
(ii) $f(1) = 1$;
(iii) ако $x_1, x_2 \in [0,1]$ и $x_1+x_2 \leqslant 1$, онда је $f(x_1)+f(x_2) \leqslant f(x_1+x_2)$.
Доказати да за свако $x \in [0,1]$ важи $f(x) \leqslant 2x$.

3. Дата је кружница k и тачка P ван ње. Променљива права s која садржи тачку P сече кружницу k у тачкама A и B. Нека су M и N средишта лукова одређених тачкама A и B и тачка C на дужи AB таква да је $PC^2 = PA \cdot PB$.

Доказати да угао $\sphericalangle MCN$ не зависи од праве s.

4. Нека је n паран број и S скуп свих низова дужине n чији су чланови нуле и јединице, са бар једном јединицом. Доказати да се S може поделити на дисјунктне трочлане подскупове тако да важи: за свака три низа $(a_i)_{i=1}^n$, $(b_i)_{i=1}^n$, $(c_i)_{i=1}^n$ који припадају истом подскупу и свако $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ број $a_i + b_i + c_i$ дељив је са 2.

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 25 поена.
Решења детаљно образложити.

РЕШЕЊА

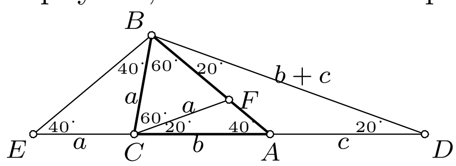
1.1. За $2 \mid x$ је $x^4 \equiv 0 \pmod{16}$. За $2 \nmid x$ важи $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$: заиста, $16 \mid x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1)$ јер $8 \mid x^2 - 1$ и $2 \mid x^2+1$. Према томе, $x_1^4 + \cdots + x_{10}^4$ даје један од остатака $0, 1, \dots, 10$ при дељењу са 16. Како је $2011 \equiv 11 \pmod{16}$, дата једначина нема решења.

1.2. Нека су a и b редом дужине пројекција дужи AB на осе x и y. Дуж AB сече $n_x \leqslant [a]+1$ вертикалних и $n_y \leqslant [b]+1$ хоризонталних правих одређених страницама квадрата, па је број квадрата које она сече

$$k = n_x + n_y + 1 \leqslant [a+b]+3 \leqslant \left[\sqrt{2(a^2+b^2)}\right] + 3 = \left[2003\sqrt{2}\right] + 3 = 2835.$$

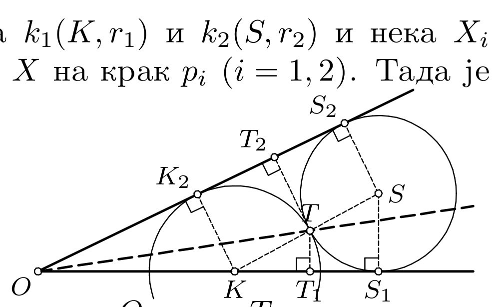
Поставимо сада тачке $A(-\frac{1}{200}, -\frac{1}{100})$ и $B(\frac{2003}{\sqrt{2}} - \frac{1}{200}, \frac{2003}{\sqrt{2}} - \frac{1}{100})$. Јасно је да дуж AB не пролази ни кроз једну целобројну тачку, па како је $[\frac{2003}{\sqrt{2}} - \frac{1}{100}] = 1416$, имамо $n_x = n_y = 1417$ и $k = 2835$.

1.3. Нека су A, B, C одговарајућа темена троугла, D и E тачке на правој AC такве да је $D-A-C-E$, $AD = c$ и $CE = a$, и F тачка на дужи AB таква да је $\triangle BCF$ једнакостраничан. Тада је $\sphericalangle BDA = 20^\circ$, $\sphericalangle BEC = 40^\circ$ и $\sphericalangle ACF = 20^\circ$, па су троуглови BDE и FCA слични. Како је $BD = CD = b+c$ и $DE = a+b+c$, имамо $\frac{b+c}{a+b+c} = \frac{BD}{DE} = \frac{FC}{CA} = \frac{a}{b}$, одакле следи тврђење.



Друго решење. По синусној теореми, тврђење је еквивалентно са $\sin 40^\circ(\sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \sin 80^\circ) = \sin 60^\circ(\sin 60^\circ + \sin 80^\circ)$. Ова једнакост следи из $\sin 40^\circ(\sin 40^\circ + \sin 60^\circ + \sin 80^\circ) = \sin 40^\circ \sin 60^\circ(1 + 2\cos 20^\circ) = \sin 60^\circ(\sin 40^\circ + 2\sin 40^\circ \cos 20^\circ) = \sin 60^\circ(\sin 40^\circ + \sin 20^\circ + \sin 60^\circ) = \sin 60^\circ(2\sin 30^\circ \cos 10^\circ + \sin 60^\circ) = \sin 60^\circ(\sin 60^\circ + \sin 80^\circ)$.

1.4. Нека је T додирна тачка кругова $k_1(K, r_1)$ и $k_2(S, r_2)$ и нека X_i означава пројекцију ма које тачке X на крак p_i $(i = 1, 2)$. Тада је $TT_1 = \frac{r_1}{r_1+r_2} SS_1 = \frac{r_1 r_2}{r_1+r_2}$ и $TT_2 = \frac{r_1}{r_1+r_2} SS_2 + \frac{r_2}{r_1+r_2} KK_2 = \frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$, дакле $TT_2 = 2TT_1$. Све овакве тачке T леже на некој отвореној полуправој Op. Јасно је да се хомотетичним пресликавањем са центром O тачка T може довести у било коју тачку на Op, па је Op тражено геометријско место.



2.1. Како је $\sqrt{a} < \sqrt{b+c} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$ (и аналогно за друге две странице), део под (а) одмах следи.

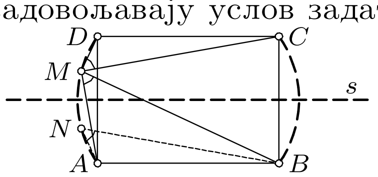
По Хероновом обрасцу, површина троугла са страницама $a = y+z$, $b = z + x$, $c = x + y$ је

$$S = \sqrt{xyz(x + y + z)} = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Тако је $S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{xy + yz + zx}$, па се неједнакост под (б) своди на $xy + yz + zx \geqslant \sqrt{3xyz(x + y + z)}$, што је еквивалентно са $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geqslant xyz(x+y+z)$. Последња неједнакост следи из очигледне $(xy-yz)^2+(yz-zx)^2+(zx-xy)^2 \geqslant 0$.

2.2. Претпоставимо да су дужине PA, PB, PC, PD рационалне. Нека, без смањења општости, P припада краћем луку AB и $P \neq B$. По Птоломејевој теореми за четвороугао $APBC$ је $BC \cdot PA + AC \cdot PB = AB \cdot PC$, што се своди на $PB\sqrt{2} = PC - PA$, а то је немогуће.

2.3. Све тачке на симетрали s дужи BC задовољавају услов задатка. Претпоставимо да за тачку $M \notin s$ важи $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMD$. Нека је N тачка симетрична њој у односу на s. Тада је $\sphericalangle AMB = \sphericalangle ANB$, па тачке A, B, M, N леже на истом кругу; тај круг садржи и тачке C, D, па је то управо описани круг k правоугаоника $ABCD$.



Јасно је да све тачке лукова BC и DA круга k задовољавају услов задатка. Према томе, тражени скуп тачака је унија ова два лука и праве s.

2.4. Из услова (ii) индукцијом следи $[\frac{n}{2^k}] \in S$ кад год је $n \geqslant 2^k$ и $n \in S$. Имамо $2003 < 2^{11}$. За свако n, бар један од бројева $2^{11}n + i$ $(0 \leqslant i < 2003)$ је у S, али тада је и $n = [\frac{2^{11}n+i}{2^{11}}] \in S$.

3.1. Нека је $\alpha_1 = 5+\sqrt{35}$ и $\alpha_2 = 5-\sqrt{35}$. Посматрајмо низ $a_k = \alpha_1^k + \alpha_2^k$: јасно је да је a_k цео број, а због $-1 < \alpha_2 < 0$ важи $[\alpha_1^{2n-1}] = a_{2n-1}$. Бројеви α_1, α_2 су корени једначине $x^2 - 10x - 10 = 0$, па је $\alpha_i^{k+2} = 10\alpha_i^{k+1} + \alpha_i^k$ за $i = 1, 2$. Одавде следи да је

$$a_{k+2} = 10(a_{k+1} + a_k).$$

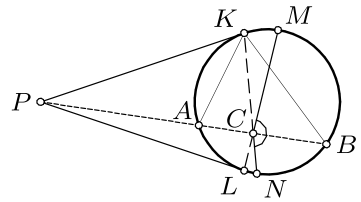
Сада доказујемо индукцијом по k да $10^{[\frac{k+1}{2}]} \mid a_k$: то је тачно за $k = 0, 1$, а индуктивни корак следи из

$$10^{[\frac{k+1}{2}]} \mid a_k, a_{k+1} \quad \Rightarrow \quad 10^{[\frac{k+3}{2}]} \mid 10(a_k + a_{k+1}) = a_{k+2}.$$

3.2. За почетак, имамо $f(x) \leqslant f(x) + f(1-x) \leqslant f(1) = 1$ за све $x \in [0,1]$.

По услову (ii) је $2f(x) \leqslant f(2x)$, па једноставном индукцијом добијамо $2^k f(x) \leqslant f(2^k x) \leqslant 1$ кад год је $0 \leqslant 2^k x \leqslant 1$. Узмимо $k \in \mathbb{N}_0$ тако да је $\frac{1}{2} \leqslant 2^k x \leqslant 1$. Тада је $2^k f(x) \leqslant 1 \leqslant 2^{k+1}x$, тј. $f(x) \leqslant 2x$.

3.3. Нека су PK и PL тангенте на круг k, при чему су K и M са исте исте стране праве s. Како су троуглови PAK и PKBслични и $PK = PC$, имамо $\sphericalangle PKN = \frac{1}{2}(\sphericalangle PKA + \sphericalangle PKB) = \frac{1}{2}(\sphericalangle PKA + \sphericalangle PAK) = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle APK) = \sphericalangle PKC$, тј. тачке K, C, N су колинеарне. Аналогно, тачке L, C, M су колинеарне, па је $\sphericalangle MCN = \sphericalangle KCL = \sphericalangle KCP + \sphericalangle PCL = \frac{1}{2}(360^\circ - \sphericalangle KPC - \sphericalangle CPL) = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle KPL$, што не зависи од праве s.



3.4. Скуп посматраних низова дужине n означавамо са S_n. За низове a и b, са ab означавамо низ добијен њиховим спајањем (тим редом). Тврђење доказујемо индукцијом по n. За $n = 2$ је тривијално. Претпоставимо да имамо тражену поделу скупа S_n на тројке низова $\{A_i, B_i, C_i\}$, $1 \leqslant i \leqslant \frac{2^n-1}{3}$. Тада подела скупа S_{n+2} на тројке

$$\begin{array}{ll} \{A_i00, B_i00, C_i00\}, & \{A_i01, B_i10, C_i11\}, \\ \{A_i11, B_i01, C_i10\}, & \{A_i10, B_i11, C_i01\} \end{array} \quad \text{за} \quad 1 \leqslant i \leqslant \frac{2^n - 1}{3}$$

и тројку $\{00\ldots001, 00\ldots010, 00\ldots011\}$ задовољава услове.